INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXX. BAND FÜNFTES HEFT 1961

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 13. September 1961

Postverlagsort Berlin

Preis DM 13,40

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel,** Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz,** Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter,** Darmstadt, Technische Hochschule, Institut für angewandte Mechanik
Professor Dr. **K. Magnus,** Stuttgart O, Hackländerstraße 33
Professor Dr. **E. Mettler,** Karlsruhe-Durlach, Geigersbergstr. 12
Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden,** Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt,** Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen,** Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Nachdruck: Mit der Annahme des Manuskripts eines Beitrages für das „Ingenieur-Archiv" erwirbt der Springer-Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder, einschließlich des Rechts der photomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung. — Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen nicht vorher an anderer Stelle veröffentlicht worden sein und auch später nicht anderweitig, weder im Inland noch im Ausland, veröffentlicht werden. Ausnahmen von dieser Regel bedürfen einer entsprechenden Vereinbarung zwischen Autor, Herausgeber und Verlag.

Photokopien: Auf Grund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung photomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle) Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Postfach 3027
Fernsprecher 27901 / Fernschreib-Nr. 04 — 61723

Berlin-Wilmersdorf
Heidelberger Platz 3
Fernsprecher Sammel-Nr. 830301 / Fernschreib-Nr. 01 — 83319

Inhalt:

Seite

Reidelbach, W., Der Spannungszustand im Übergangsgebiet einer rechtwinkligen Rohrabzweigung. Mit 28 Abbildungen 293

Szablewski, W., Die Relation zwischen Temperatur und Geschwindigkeit in der Theorie kompressibler turbulenter Grenzschichten. Mit 4 Abbildungen..... 317

Hübner, E., Das Auswuchten elastischer Rotoren, ein Problem der Strukturanalyse. Mit 5 Abbildungen 325

Feindt, E.-G., Berechnung der Strömung des instationären vielstufigen Plattengitters. Mit 10 Abbildungen 339

Schwanecke, H., Über Messungen an periodisch instationär angeströmten Tragflügeln. Mit 22 Abbildungen 350

INGENIEUR-ARCHIV

XXX. BAND FÜNFTES HEFT 1961

Der Spannungszustand im Übergangsgebiet einer rechtwinkligen Rohrabzweigung*

Von **W. Reidelbach**

1. Einleitung. In der Wand eines geraden, kreiszylindrischen Rohres, das durch Innendruck belastet ist, herrscht in einiger Entfernung von seinen Enden ein gleichförmiger, in erster Näherung ebener Spannungszustand, dessen Hauptspannungen parallel und senkrecht zu den Mantellinien der Rohrwand gerichtet sind. Ihre Berechnung bereitet auch bei dickwandigen Rohren keine Schwierigkeiten. Ebenfalls bekannt sind die Randstörungen in der Nähe der Rohrenden, die z. B. durch Flansche oder — bei Behältern und Kesseln — durch Deckel bewirkt werden und hauptsächlich als sekundre, relativ schnell abklingende Biegespannungen auftreten.

Theoretisch unerforscht war bisher die Störung in der Umgebung einer Rohrabzweigung (Abb. 1). Die Wand des durchgehenden Rohres ist unterbrochen und mithin der ebene Grundspannungszustand gestört durch das Loch, in welches das abzweigende Rohr mündet. Das Loch wirkt ähnlich wie eine Bohrung in gespannten, ebenen Blechen: Man hat zunächst mit beträchtlich gesteigerten Hauptspannungen des Membranspannungszustandes zu rechnen. Außerdem greifen infolge der achsialen Innendruckbelastung des abzweigenden Rohres am Rande des Mündungsloches auch Kräfte normal zur durchbohrten Rohrwand und Biegemomente an, die sekundäre Biegespannungen bewirken.

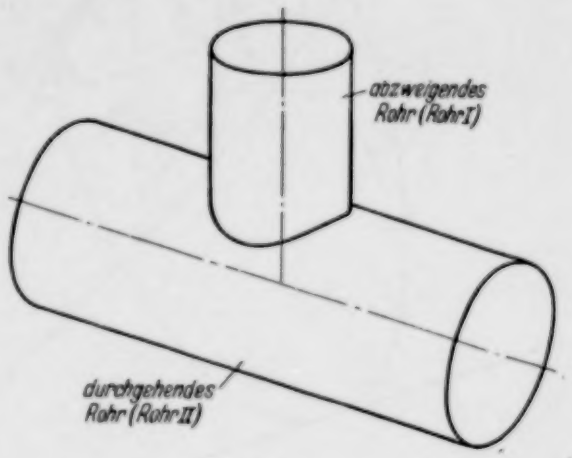


Abb. 1.

Bekanntlich ist in einer nicht durchbrochenen Rohrwand die Umfangsspannung ungefähr (in einem dünnwandigen Rohr genau) doppelt so groß wie die achsiale Spannung. Daraus folgt, daß der zu einem Umfangskreis parallele Durchmesser des Mündungsloches stärker als der achsenparallele Durchmesser gedehnt, das Loch also „ovalisiert" wird. Diese Deformation wird einerseits durch das abzweigende Rohr behindert, diesem jedoch andererseits aufgezwungen, so daß als Randstörung am einmündenden Ende dieses Rohres radiale und tangentiale Kräfte und — infolge der gegenseitigen Einspannung der Rohrwände längs des Lochrandes — Biegemomente auftreten.

Zur theoretischen Behandlung des Problems wird daher die Biegetheorie der Kreiszylinderschale herangezogen, und zwar in einer vereinfachten Form, die u. a. von *A. E. Green* und *W. Zerna*[1,2] entwickelt und bereits auf ähnliche Probleme mit Erfolg angewendet wurde[3,4]. Die daraus entwickelte Lösung des vorliegenden Problems stellt nur eine erste Näherung dar. Auf größere Genauigkeit wurde bewußt verzichtet, um den Umfang der numerischen Rechenarbeit möglichst klein zu halten. Durch den Einsatz geeigneter, moderner Rechengeräte können jedoch genauere Ergebnisse ohne weiteres erzielt werden.

Bis auf wenige Ausnahmen werden im folgenden alle dem abzweigenden Rohre zugeordneten Größen durch kleine, dem durchgehenden Rohre zugeordneten Größen durch große Buchstaben gekennzeichnet. Der aus den beiden Rohren gebildete Körper ist zweifach symmetrisch. Die Symmetrieebene, welche die beiden Rohrachsen enthält, heiße Längsebene, die dazu senkrechte, durch die Achse des abzweigenden Rohres gehende Symmetrieebene heiße Querebene.

---

* Habilitationsarbeit Karlsruhe 1960.

[1] *W. Zerna*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 357.

[2] *A. E. Green* und *W. Zerna*, Theoretical Elasticity, S. 385, Oxford 1954.

[3] *A. I. Lurje*, Prikladnaja Matematika i Mekhanika, Neue Serie 10, 3, Moskau 1946, S. 397. Auszug in deutscher Sprache in *G. N. Sawin*, Spannungserhöhung am Rande von Löchern, S. 130, Berlin 1956.

[4] *D. Withum*, Ing.-Arch. 26 (1958), S. 435.

2. Koordinaten, geometrische Beziehungen. Es sei vorausgesetzt, daß der mittlere Durchmesser $2a$ des abzweigenden Rohres I kleiner als oder höchstens ebenso groß wie der mittlere Durchmesser $2A$ des durchlaufenden Rohres II ist, daß die Rohrachsen senkrecht auf einander stehen und sich in einem Punkte O schneiden. Dieser Punkt O sei der Ursprung der parallel zu den Rohrachsen gemessenen Koordinaten x bzw. X und $\xi = x/a$ bzw. $\Xi = X/A$ (Abb. 2). Die Längsebene schneidet die Schalenmittelflächen I bzw. II in den Mantellinien l bzw. L, von denen aus die Umfangskoordinaten y bzw. Y und die Zentriwinkel $\varphi = y/a$ bzw. $\Phi = Y/A$ gezählt werden. In irgend einem Punkte p bzw. P der Mittelflächen werden die dort gültigen Koordinatenrichtungen x und y bzw. X und Y durch dazu senkrechte, also zur Mittelfläche normale Bezugsachsen z bzw. Z jeweils zu einem dreiachsigen, cartesischen System ergänzt, wobei z bzw. Z nach außen positiv zu rechnen sind.

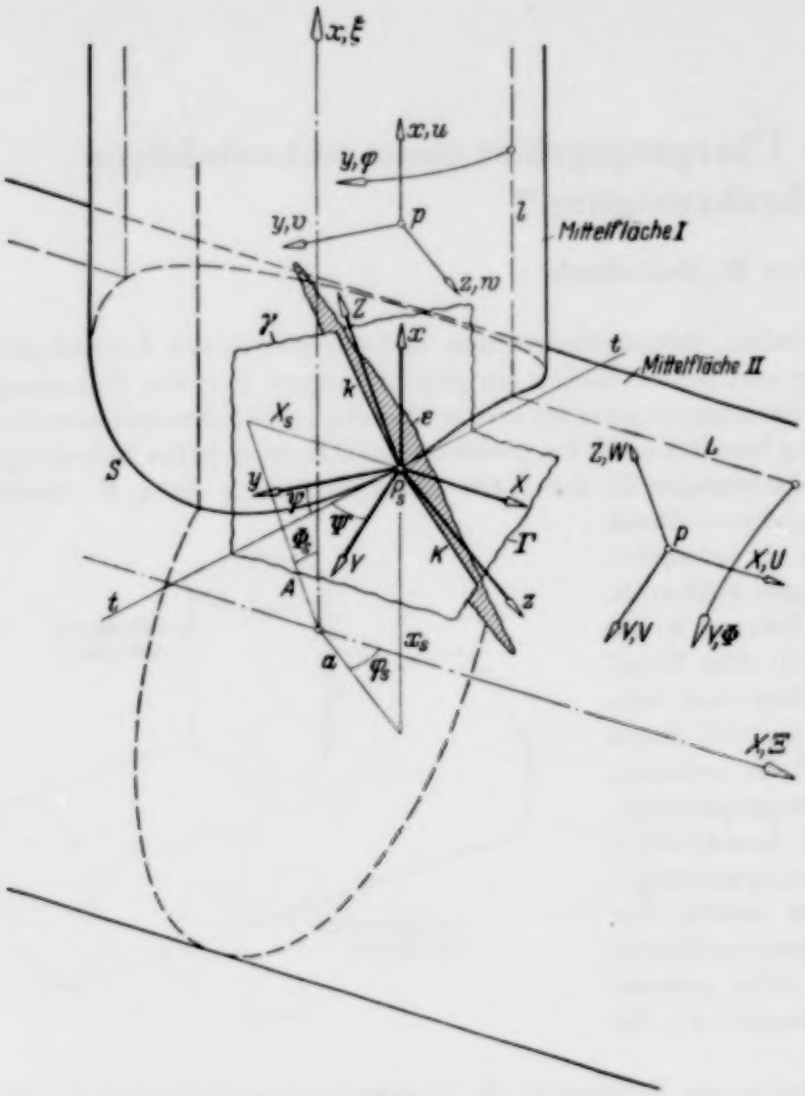


Abb. 2.

Bezeichnet $\nu = a/A$ das Verhältnis der Mittelflächenradien und ξ_s, φ_s bzw. Ξ_s, Φ_s die Koordinaten eines Punktes P_s der Schnittkurve S der beiden Mittelflächen, so ist

$$\left.\begin{aligned} \sin\Phi_s &= \nu \sin\varphi_s\,, \\ \Xi_s &= \nu\cos\varphi_s\,, \\ \xi_s &= \frac{1}{\nu}\cos\Phi_s\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

Die in P_s an die Schnittkurve gelegte Tangente t schließt mit den durch P_s gehenden Bezugsachsen y bzw. Y die Winkel ψ bzw. Ψ ein. Aus Abb. 3 folgt, wenn man eine längs t abgemessene Längeneinheit auf die y- bzw. Y-Achse und auf die gemeinsame Normale n der x- bzw. X-Achse projiziert,

$$\begin{aligned} \cos\psi\cos\varphi_s &= \cos\Psi\cos\Phi_s\,, \\ \sin\psi &= \cos\Psi\sin\Phi_s\,, \\ \sin\Psi &= \cos\psi\sin\varphi_s\,, \end{aligned}$$

und wenn $\cos\psi/\cos\Phi_s = \cos\Psi/\cos\varphi_s = C$ gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi &= C\cos\varphi_s\sin\Phi_s\,, \\ \cos\psi &= C\cos\Phi_s\,, \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\Psi &= C\cos\Phi_s\sin\varphi_s\,, \\ \cos\Psi &= C\cos\varphi_s\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

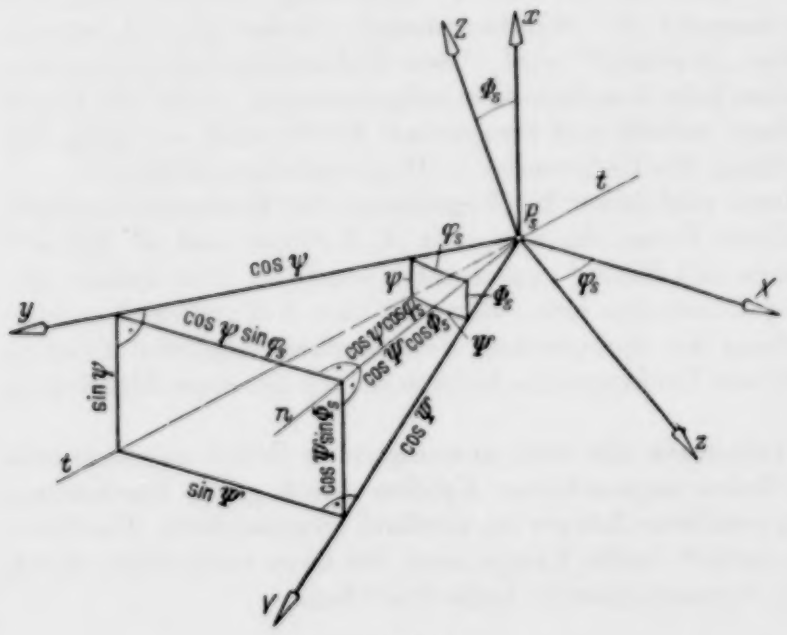


Abb. 3.

Die Tangente t ist die Schnittgerade der Tangentialebenen γ bzw. Γ, welche die Mittelflächen I bzw. II im Punkte P_s berühren. Die Spuren k bzw. K der Tangentialebenen in einer auf t senkrechten Ebene ε durch P_s schließen den Winkel χ ein (Abb. 4), ebenso die durch P_s gehenden

Bezugsachsen z bzw. Z. Wird von P_s aus längs Z eine Längeneinheit abgemessen und auf k projiziert, so hat die Projektion die Länge $\cos \Phi_s / \cos \psi$ und das projizierende Lot die Länge $\sin \varphi_s \sin \Phi_s$. Daher ist

$$\sin \chi = \frac{\cos \Phi_s}{\cos \psi} = \frac{1}{C}, \qquad \cos \chi = \sin \varphi_s \sin \Phi_s = \nu \sin^2 \varphi_s, \tag{2.4}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \chi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \nu^2 \sin^4 \varphi_s}}. \tag{2.5}$$

Innerhalb des Koordinatensystems (ξ, φ) auf der Mittelfläche I hat die Schnittkurve die Gleichung

$$\xi_s = \frac{1}{\nu} \sqrt{1 - \sin^2 \Phi_s} = \sqrt{\frac{1}{\nu^2} - \sin^2 \varphi_s}, \tag{2.6}$$

im Koordinatensystem (Ξ, Φ) auf der Mittelfläche II die Gleichung

$$\Xi_s = \nu \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_s} = \sqrt{\nu^2 - \sin^2 \Phi_s}. \tag{2.7}$$

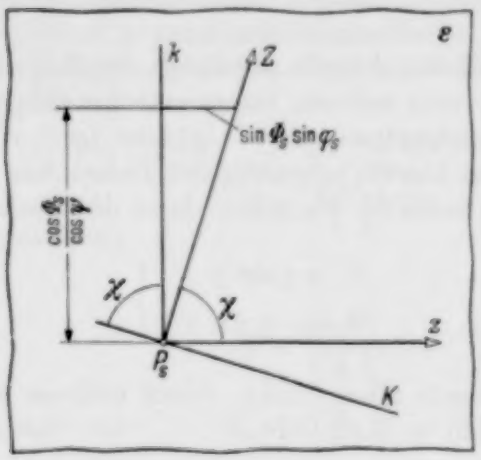


Abb. 4.

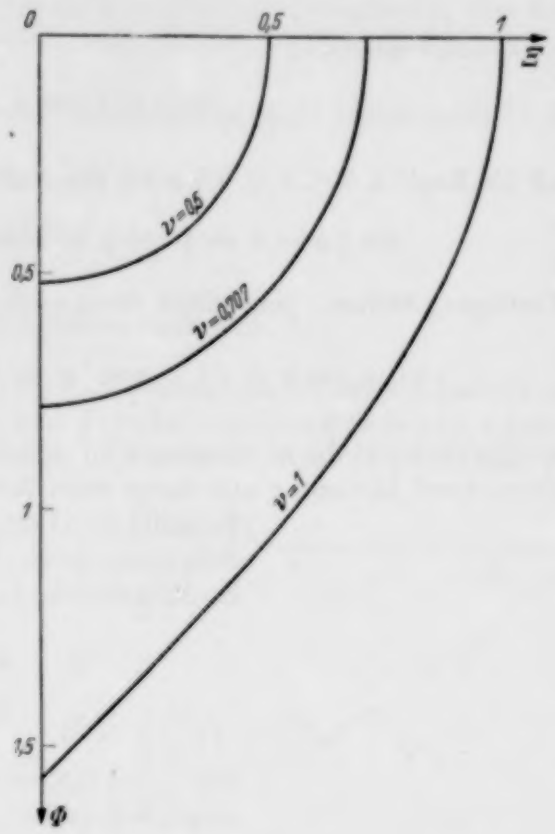


Abb. 5.

Denkt man sich die Mittelfläche II auf die längs der Mantellinie L berührende Tangentialebene abgewickelt, dann nehmen die Schnittkurven die in Abb. 5 dargestellten Formen an. Für $\nu = 1$ $(a = A)$ ergibt sich eine cos-Linie, für $\nu < 1$ ellipsenähnliche Kurven, die um so weniger von einem Kreis abweichen, je kleiner ν ist. Der Schnittpunkt Φ_s^* einer solchen Kurve mit der Y-Achse folgt aus $\Xi_s = 0$, d. h. $\nu = \sin \Phi_s^*$, zu

$$\Phi_s^* = \arcsin \nu = \nu \left(1 + \frac{1}{6} \nu^2 + \frac{3}{40} \nu^4 + \frac{15}{336} \nu^6 + \cdots\right).$$

Die größte radiale Abweichung der Schnittkurve mit dem Parameter ν vom Kreis mit dem Halbmesser ν, bezogen auf ν,

$$\Delta\nu = \frac{\Phi_s^* - \nu}{\nu} = \frac{1}{16} \nu^2 + \frac{3}{40} \nu^4 + \cdots$$

bleibt kleiner als 5% ($\Delta\nu < 0{,}05$) für $\nu \leqq 0{,}5$. Man kann daher im Bereich $0 \leqq \nu \leqq 0{,}5$ gegebenenfalls statt der Schnittkurve (2.7) einen Kreis

$$\Xi_s^2 = \nu^2 - \Phi_s^2 \qquad \text{oder} \qquad \Xi_s = \nu \cos \varphi_s, \qquad \Phi_s = \nu \sin \varphi_s \tag{2.8}$$

verwenden. Aus (2.2) folgt mit (2.3) und (2.5)

$$\cos^2 \psi = \frac{\sin^2 \Psi}{\sin^2 \varphi_s} = \frac{\cos^2 \Phi_s}{\sin^2 \chi} = \frac{1 - \nu^2 \sin^2 \varphi_s}{1 - \nu^2 \sin^4 \varphi_s} \leqq 1.$$

Dieser Quotient erreicht mit

$$\sin^2 \varphi_s = \frac{1}{\nu^2} - \sqrt{\frac{1}{\nu^4} - \frac{1}{\nu^2}}$$

den kleinsten Wert

$$(\cos^2\psi)_{min} = \left[\frac{\sin^2\Psi}{\sin^2\varphi_s}\right]_{min} = \frac{\nu^2}{2\left(1-\sqrt{1-\nu^2}\right)}. \tag{2.9}$$

Im Bereich $0 \leqq \nu \leqq 0{,}5$ ist demnach

$$1 \geqq \cos\psi = \frac{\sin\Psi}{\sin\varphi_s} \geqq 0{,}97\,,$$

also

$$\Psi \approx \varphi_s\,, \qquad \cos\psi \approx 1\,. \tag{2.10}$$

Aus (2.2) folgt mit (2.1)

$$\sin\psi = C\cos\varphi_s\,\nu\sin\varphi_s = C\,\frac{\nu}{2}\sin 2\varphi_s\,,$$

so daß im Bereich $0 \leqq \nu \leqq 0{,}5$ auch die Näherungen

$$\sin 2\psi = 2\sin\psi\cos\psi \approx 2\sin\psi = C\,\nu\sin 2\varphi_s\,, \qquad \cos 2\psi \approx 1 \tag{2.11}$$

zur Verfügung stehen. Schließlich seien noch zwei später auftretende Faktoren betrachtet:

$$\sqrt{1\pm\cos\chi} = \sqrt{1\pm\nu\sin^2\varphi_s} \approx 1\pm\frac{\nu}{2}\sin^2\varphi_s = 1\pm\frac{\nu}{4}\left(1-\cos 2\varphi_s\right). \tag{2.12}$$

Im Hinblick auf die in Abschnitt 6 formulierten Randbedingungen, die längs der Schnittkurve, bei hinreichend kleinem ν also längs eines Kreises erfüllt sein müssen, ist es zweckmäßig, auf der Mittelfläche II ein polares Koordinatensystem (r, φ) bzw. $(\varrho = r/a, \varphi)$ zu definieren, dessen Ursprung im Durchstoßpunkt der Rohrachse I durch die Mittelfläche II liegen soll (Abb. 6). Es gelten dann die Beziehungen

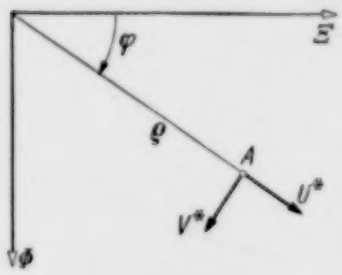
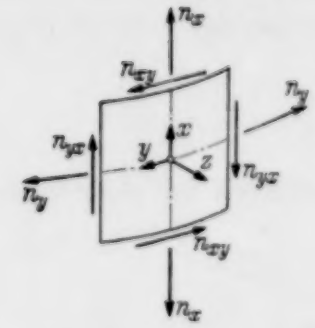


Abb. 6.

$$\left.\begin{aligned} X &= r\cos\varphi\,, & Y &= r\sin\varphi\,,\\ \Xi &= \nu\,\varrho\cos\varphi\,, & \Phi &= \nu\,\varrho\sin\varphi\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Für $\varrho = 1$ (konstante Koordinate aller Punkte einer nahezu kreisförmigen Schnittkurve) geht (2.13) in (2.8) über.

3. Verschiebungen, Schnittgrößen. Die Verschiebung irgend eines Punktes p bzw. P der Schalenmittelflächen resultiert im allgemeinen aus je drei Komponenten u, v, w bzw. U, V, W. In Abb. 2 sind die Richtungen positiver Verschiebungskomponenten (im folgenden kurz Verschiebungen



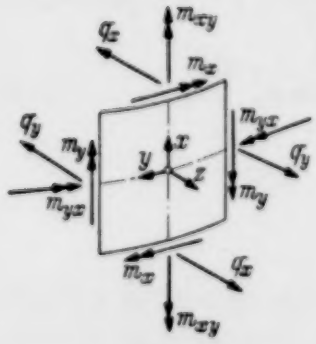
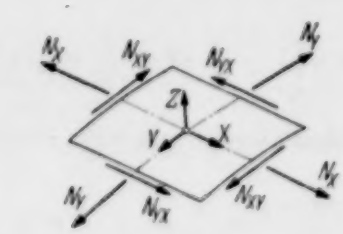


Abb. 7.



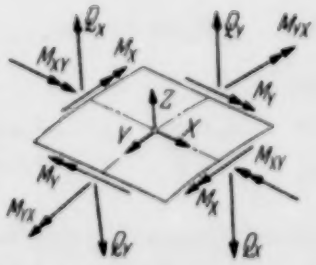
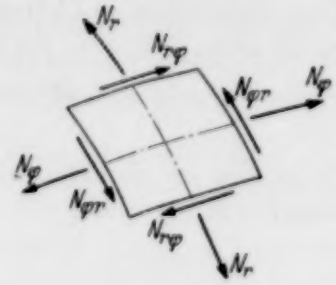


Abb. 8.



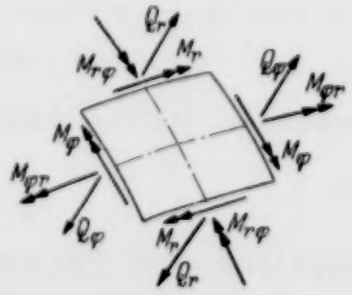


Abb. 9.

genannt) angegeben. Es seien partielle Ableitungen der Verschiebungen nach den Koordinaten φ bzw. Φ durch Punkte, Ableitungen nach ξ bzw. Ξ durch Striche gekennzeichnet:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} \equiv u^{\cdot}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \xi} \equiv u', \qquad \frac{\partial U}{\partial \Phi} \equiv U^{\cdot}, \qquad \frac{\partial U}{\partial \Xi} \equiv U' \text{ usw.}$$

Die positiven Schnittgrößen zeigen Abb. 7 und 8. Die Vektoren der Schnittmomente seien als Rechtsschrauben definiert. Die Richtungen der positiven Momentenvektoren wurden so gewählt, daß in beiden Koordinatensystemen (x, y, z) bzw. (X, Y, Z) formal identische Grundgleichungen gelten. Man erhält dann aus den in Abschnitt 5 dargestellten Grundgleichungen für das Rohr I die entsprechenden Gleichungen für das Rohr II, indem man die kleinen Buchstaben durch die entsprechenden großen Buchstaben ersetzt.

In bezug auf das durch (2.13) definierte polare Koordinatensystem (ϱ, φ) treten statt U, V, W die Verschiebungen

$$\left.\begin{aligned} U^{*} &= U\cos\varphi + V\sin\varphi\,, \\ V^{*} &= -U\sin\varphi + V\cos\varphi\,, \\ W^{*} &= W \end{aligned}\right\} \tag{13.1}$$

auf und statt der Schnittgrößen nach Abb. 8 die Schnittgrößen nach Abb. 9.

4. Der Grundspannungszustand. In hinreichend großer Entfernung von der Schnittkurve erzeugt der Innendruck p rotationssymmetrische Spannungs- und Formänderungszustände mit folgenden, durch $\sim$ gekennzeichneten Größen (E Elastizitätsmodul, μ Querzahl, h bzw. H Dicke der Rohrwände, ξ_0 eine Konstante):

	Rohr I	Rohr II
Verschiebungen:	$\left\{\begin{aligned}\tilde{u} &= \frac{p\,a^2}{2\,E\,h}(1-2\,\mu)(\xi-\xi_0)\,,\\ \tilde{v} &= 0\,,\end{aligned}\right.$	$\left\{\begin{aligned}\tilde{U} &= \frac{p\,A^2}{2\,E\,H}(1-2\,\mu)\,\Xi\,,\\ \tilde{V} &= 0\,,\end{aligned}\right.$
	$\tilde{w} = \frac{p\,a^2}{E\,h}\left(1-\frac{\mu}{2}\right),$	$\tilde{W} = \frac{p\,A^2}{E\,H}\left(1-\frac{\mu}{2}\right),$
Achsialspannung:	$\tilde{n}_x = \frac{p\,a}{2}\,,$	$\tilde{N}_X = \frac{p\,A}{2}\,,$
Umfangsspannung:	$\tilde{n}_y = p\,a\,,$	$\tilde{N}_Y = p\,A\,,$

oder für Rohr II mit Bezug auf das Koordinatensystem (ϱ, φ):

$$\tilde{U}^{*} = \frac{p\,A^2}{E\,H}\,\frac{1-2\,\mu}{4}\,\nu\,\varrho\,(1+\cos 2\varphi)\,, \qquad \tilde{N}_r = \frac{p\,A}{4}\,(3-\cos 2\varphi)\,,$$

$$\tilde{V}^{*} = -\frac{p\,A^2}{E\,H}\,\frac{1-2\,\mu}{4}\,\nu\,\varrho\sin 2\varphi\,, \qquad \tilde{N}_\varphi = \frac{p\,A}{4}\,(3+\cos 2\varphi)\,,$$

$$\tilde{W}^{*} = \frac{p\,A^2}{E\,H}\left(1-\frac{\mu}{2}\right), \qquad \tilde{N}_{r\varphi} = \frac{p\,A}{4}\sin 2\varphi\,.$$

Die tatsächlichen Spannungs- und Formänderungszustände ergeben sich dadurch, daß man den Grundzuständen eine Randstörung überlagert, die durch eine in den Punkten der Schnittkurve angreifende Gleichgewichtsgruppe von (inneren) Schnittkräften und -momenten hervorgerufen wird. Der zu überlagernde Störungszustand wird im folgenden mit Hilfe der von *Green* und *Zerna* entwickelten Näherungstheorie für die biegesteife Kreiszylinderschale bestimmt.

5. Grundgleichungen der Biegetheorie der Kreiszylinderschale. Aus den Verschiebungen und ihren Ableitungen berechnet man zunächst die Verzerrungen der Schalenmittelfläche

$$\varepsilon_x = \frac{u'}{a}\,, \qquad \varepsilon_y = \frac{v^{\cdot}}{a} + \frac{w}{a}\,, \qquad \gamma_{xy} = \frac{u^{\cdot}}{a} + \frac{v'}{a} \tag{5.1}$$

und daraus die in der Mittelfläche wirkenden Schnittkräfte

$$\left.\begin{aligned} n_x &= E^{*}\,h\,(\varepsilon_x + \mu\,\varepsilon_y)\,, \\ n_y &= E^{*}\,h\,(\varepsilon_y + \mu\,\varepsilon_x)\,, \\ n_{xy} &= n_{yx} = E^{*}\,h\,\frac{1-\mu}{2}\,\gamma_{xy}\,, \end{aligned}\right\} \quad E^{*} = \frac{E}{1-\mu^2}\,. \tag{5.2}$$

Die Schnittmomente ergeben sich aus den Ableitungen der Verschiebung w zu

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \frac{E^* h^3}{12\,a^2}\,(w'' + \mu\, w^{\cdot\cdot})\,, \\ m_y &= \frac{E^* h^3}{12\,a^2}\,(w^{\cdot\cdot} + \mu\, w'')\,, \\ m_{xy} &= m_{yx} = \frac{E^* h^3}{12\,a^2}\,(1-\mu)\,w^{\prime\cdot}\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Da bei Einleitung einer reinen Randstörung die innere oder äußere Schalenoberfläche nicht belastet ist, unterliegen die an den vier Kanten eines Schalenelementes angreifenden Schnittgrößen folgenden statischen Gleichgewichtsbedingungen:

$$n_x' + n_{xy}^{\cdot} = 0\,, \tag{5.4}$$

$$n_y^{\cdot} + n_{xy}' - q_y = 0\,, \tag{5.5}$$

$$q_y^{\cdot} + q_x' + n_y = 0\,, \tag{5.6}$$

$$m_y^{\cdot} + m_{xy}' - q_y\,a = 0\,, \tag{5.7}$$

$$m_x' + m_{xy}^{\cdot} - q_x\,a = 0\,, \tag{5.8}$$

während die Verzerrungen die Verträglichkeitsbedingung

$$\varepsilon_x^{\cdot\cdot} + \varepsilon_y'' - \gamma_{xy}'^{\cdot} - \frac{w''}{a} = 0 \tag{5.9}$$

erfüllen müssen.

Im Rahmen der Näherungstheorie kann man die Querkraft q_y in der Gleichgewichtsbedingung (5.5) unterdrücken, so daß

$$n_y^{\cdot} + n_{xy}' = 0 \tag{5.10}$$

sein muß. Werden die in der Mittelfläche wirkenden Schnittkräfte gemäß

$$n_x = f^{\cdot\cdot}\,, \qquad n_y = f''\,, \qquad n_{xy} = -f'^{\cdot} \tag{5.11}$$

aus einer Spannungsfunktion $f(\xi, \varphi)$ abgeleitet, so sind die Gleichgewichtsbedingungen (5.4) und (5.10) identisch erfüllt. Die Querkräfte können mittels (5.7) und (5.8) unmittelbar durch die Momente und mit (5.3) schließlich durch die Verschiebung w dargestellt werden ($\Delta w \equiv w'' + w^{\cdot\cdot}$):

$$q_x = \frac{E^* h^3}{12\,a^3}\,(\Delta w)'\,, \tag{5.12}$$

$$q_y = \frac{E^* h^3}{12\,a^3}\,(\Delta w)^{\cdot}. \tag{5.13}$$

Damit und mit $n_y = f''$ erhält (5.6) die Form

$$\Delta\Delta w + \frac{12\,a^3}{E^* h^3}\,f'' = 0\,. \tag{5.14}$$

Aus (5.2) ergeben sich die Verzerrungen

$$\varepsilon_x = \frac{n_x - \mu\, n_y}{E\,h}\,, \qquad \varepsilon_y = \frac{n_y - \mu\, n_x}{E\,h}\,, \qquad \gamma_{xy} = \frac{2\,(1+\mu)}{E\,h}\,n_{xy}$$

als Funktionen der Schnittkräfte n_x, n_y, n_{xy} und damit der Spannungsfunktion f, so daß (5.9) schließlich übergeht in

$$\Delta\Delta f - \frac{E\,h}{a}\,w'' = 0\,. \tag{5.15}$$

Durch Einführung der komplexen Funktion

$$g = w + i\,k\,f$$

werden die beiden simultanen Differentialgleichungen (5.14) und (5.15) zu einer komplexen Differentialgleichung

$$\Delta\Delta g - 2\,i\,\vartheta^2\,g'' = 0 \tag{5.16}$$

vereinigt. Die Koeffizienten

$$k = \frac{a^2}{h^2}\,\frac{\sqrt{12\,(1-\mu^2)}}{E}\,, \qquad \vartheta^2 = \frac{a}{h}\,\sqrt{3\,(1-\mu^2)} \tag{5.17}$$

haben die Bedeutung von Schalenkennzahlen. Für Rohr II gilt analog

$$G = W + i\,K\,F\,, \qquad \Delta\Delta G - 2\,i\,\Theta^2\,G'' = 0\,, \tag{5.18}$$

$$K = \frac{A^2}{H^2}\,\frac{\sqrt{12\,(1-\mu^2)}}{E}\,, \qquad \Theta^2 = \frac{A}{H}\,\sqrt{3\,(1-\mu^2)}\,.$$

Die Differentialgleichung (5.16) wird durch die Exponentialfunktion

$$g = c\,e^{p_\xi \xi + p_\varphi \varphi} \tag{5.19}$$

befriedigt, falls deren Eigenwerte der charakteristischen Gleichung

$$p_\xi^4 + 2\,p_\xi^2\,p_\varphi^2 + p_\varphi^4 - 2\,i\,\vartheta^2\,p_\xi^2 = 0$$

oder

$$p_\xi^2 + p_\varphi^2 \pm (1+i)\,\vartheta\,p_\xi = 0$$

genügen. Mit

$$\bar{p}_\xi = \frac{2}{\vartheta}\,p_\xi\,, \qquad \bar{p}_\varphi = \frac{2}{\vartheta}\,p_\varphi$$

erhält man schließlich

$$\bar{p}_\xi = \pm\,(1+i) \pm \sqrt{2\,i - \bar{p}_\varphi^2}\,. \tag{5.20}$$

Bezeichnet man Ableitungen nach ϱ durch Striche, Ableitungen nach φ durch Punkte und werden die Verschiebungen U^*, V^* vorübergehend ohne Stern geschrieben, so gelten in bezug auf das Koordinatensystem (ϱ, φ) folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a\,\varepsilon_r &= U' + \nu\,W\sin^2\varphi\,,\\ \varrho\,a\,\varepsilon_\varphi &= \dot{V} + U + \varrho\,\nu\,W\cos^2\varphi\,,\\ \varrho\,a\,\gamma_{r\varphi} &= \dot{U} + \varrho\,V' - V + \varrho\,\nu\,W\sin 2\varphi\,, \end{aligned}\right\} \tag{5.21}$$

$$\left.\begin{aligned} N_r &= E^*H\,(\varepsilon_r + \mu\,\varepsilon_\varphi)\,,\\ N_\varphi &= E^*H\,(\varepsilon_\varphi + \mu\,\varepsilon_r)\,,\\ N_{r\varphi} &= E^*H\,\frac{1-\mu}{2}\,\gamma_{r\varphi}\,, \end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

$$\left.\begin{aligned} M_r &= \frac{E^*H^3}{12\,a^2}\left(W'' + \frac{\mu}{\varrho}\,W' + \frac{\mu}{\varrho^2}\,\ddot{W}\right),\\ M_\varphi &= \frac{E^*H^3}{12\,a^2}\left(\mu\,W'' + \frac{1}{\varrho}\,W' + \frac{1}{\varrho^2}\,\ddot{W}\right),\\ M_{r\varphi} &= M_{\varphi r} = \frac{E^*H^3}{12\,a^2}\,(1-\mu)\left(\frac{1}{\varrho}\,\dot{W}' - \frac{1}{\varrho^2}\,\dot{W}\right), \end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_r &= \frac{E^*H^3}{12\,a^3}\,(\Delta W)'\,,\\ Q_\varphi &= \frac{E^*H^3}{12\,a^3}\,(\Delta W)^{\cdot}\,, \end{aligned}\right\} \quad \Delta W \equiv W'' + \frac{1}{\varrho}\,W' + \frac{1}{\varrho^2}\,\ddot{W}\,. \tag{5.24}$$

Aus den Beziehungen (2.13) zwischen den Koordinaten erhält man die folgenden allgemeinen Beziehungen zwischen den Differentialquotienten:

$$\frac{\partial^2}{\partial \Xi^2} = \frac{\partial^2}{\partial(\nu\varrho)^2}\cos^2\varphi + \left[\frac{1}{\nu\varrho}\,\frac{\partial}{\partial(\nu\varrho)} + \frac{1}{(\nu\varrho)^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\sin^2\varphi + \left[\frac{1}{(\nu\varrho)^2}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{\nu\varrho}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial(\nu\varrho)}\right]\sin 2\varphi\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} = \frac{\partial^2}{\partial(\nu\varrho)^2}\sin^2\varphi + \left[\frac{1}{\nu\varrho}\,\frac{\partial}{\partial(\nu\varrho)} + \frac{1}{(\nu\varrho)^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\cos^2\varphi + \left[\frac{1}{\nu\varrho}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial(\nu\varrho)} - \frac{1}{(\nu\varrho)^2}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\sin 2\varphi\,,$$

die es gestatten, die Differentialgleichung (5.18) zu transformieren in

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial(\nu\varrho)^2} + \frac{1}{\nu\varrho}\,\frac{\partial}{\partial(\nu\varrho)} + \frac{1}{(\nu\varrho)^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\left[\frac{\partial^2 G}{\partial(\nu\varrho)^2} + \frac{1}{\nu\varrho}\,\frac{\partial G}{\partial(\nu\varrho)} + \frac{1}{(\nu\varrho)^2}\,\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2}\right]$$

$$- 2\,i\,\Theta^2\left\{\frac{\partial^2 G}{\partial(\nu\varrho)^2}\cos^2\varphi + \left[\frac{1}{\nu\varrho}\,\frac{\partial G}{\partial(\nu\varrho)} + \frac{1}{(\nu\varrho)^2}\,\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2}\right]\sin^2\varphi + \left[\frac{1}{(\nu\varrho)^2}\,\frac{\partial G}{\partial\varphi} + \frac{1}{\nu\varrho}\,\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi\partial(\nu\varrho)}\right]\sin 2\varphi\right\} = 0\,.$$

Multipliziert man noch mit r^4 und ersetzt man i durch $-i$ (Betrachtung der konjugiert komplexen Gleichung), $i\Theta^2 r^2$ durch η^2 und $\cos^2\varphi$ durch $\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)$, $\sin^2\varphi$ durch $\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)$, so entsteht die im (ϱ,φ)-System gültige Differentialgleichung

$$\Delta\Delta G+\eta^2\Delta G+\eta^2\left(G''-\frac{1}{\varrho}G'-\frac{1}{\varrho^2}G^{\cdot\cdot}\right)\cos 2\varphi+2\eta^2\left(\frac{1}{\varrho^2}G^{\cdot}-\frac{1}{\varrho}G'^{\cdot}\right)\sin 2\varphi=0\,. \tag{5.25}$$

Hierin ist

$$G=W-iKr^2F\,, \tag{5.26}$$

und die Schnittkräfte in der Schalenmittelfläche sind jetzt nach den Formeln

$$N_r=\frac{1}{\varrho}F'+\frac{1}{\varrho^2}F^{\cdot\cdot}\,,\qquad N_\varphi=F''\,,\qquad N_{r\varphi}=\frac{1}{\varrho^2}F^{\cdot}-\frac{1}{\varrho}F'^{\cdot} \tag{5.27}$$

aus der Spannungsfunktion F zu berechnen. Der Lösung (5.19) entspricht hier die Funktion

$$G=Ce^{P_\Xi\varrho\cos\varphi+P_\Phi\varrho\sin\varphi}\,. \tag{5.28}$$

6. Symmetrie- und Randbedingungen. Da die Formänderungen beider Rohre sowohl zur Längsebene als auch zur Querebene symmetrisch sind, müssen die Verschiebungen u, v, w symmetrisch in bezug auf $\varphi=0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ und die Verschiebungen U, V, W symmetrisch in bezug auf $\Phi=0,\pi$ und $\Xi=0$ sein. Ferner ist zu beachten, daß in den Symmetrieebenen keine Schubkräfte und Drillmomente übertragen werden. Daraus folgen als Symmetriebedingungen

für $\varphi=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$:

$$\begin{cases} v=0\,, & u^{\cdot}=0\,, & w^{\cdot}=0\,, & (6.1)\\ n_{xy}=0\,, & q_y=0\,, & m_{xy}=0\,, & (6.2)\end{cases}$$

für $\Phi=0,\pi$:

$$\begin{cases} V=0\,, & U^{\cdot}=0\,, & W^{\cdot}=0\,, & (6.3)\\ N_{XY}=0\,, & Q_Y=0\,, & M_{XY}=0\,, & (6.4)\end{cases}$$

für $\Xi=0$:

$$\begin{cases} U=0\,, & V'=0\,, & W'=0\,, & (6.5)\\ N_{XY}=0\,, & Q_X=0\,, & M_{XY}=0\,. & (6.6)\end{cases}$$

Die Randbedingungen bringen die folgenden geometrischen oder mechanischen Gegebenheiten zum Ausdruck:

a) Die Randstörungen, das sind die längs der Schnittkurve S auftretenden Abweichungen der Formänderungen und Spannungen von den in Abschnitt 4 angegebenen Zustandsgrößen des Grundspannungszustandes, klingen mit zunehmender Entfernung von der Schnittkurve relativ schnell ab und verschwinden nach dem Saint-Venantschen Prinzip in einem endlichen Abstand praktisch vollständig. Die Funktionen g bzw. G müssen demnach abklingende Funktionen sein.

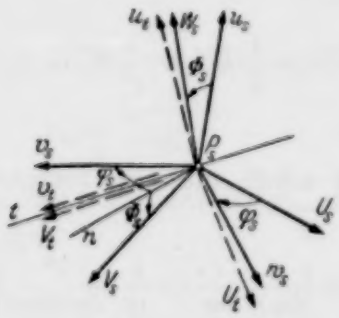


Abb. 10.

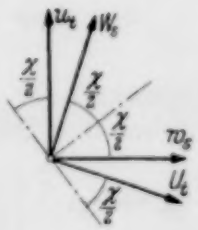


Abb. 11.

b) Der Verschiebungsvektor eines Schnittkurvenpunktes P_s muß aus den Komponenten u_s, v_s, w_s ebenso resultieren wie aus den Komponenten U_s, V_s, W_s. Diese Bedingung verlangt nach Abb. 10

$$\left.\begin{aligned} w_s\sin\varphi_s+v_s\cos\varphi_s&=W_s\sin\Phi_s+V_s\cos\Phi_s\,,\\ u_s&=W_s\cos\Phi_s-V_s\sin\Phi_s\,,\\ U_s&=w_s\cos\varphi_s-v_s\sin\varphi_s\,.\end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

Verwendet man statt u_s, v_s bzw. U_s, V_s die zur Tangente t senkrechten und parallelen Komponenten

$$\left.\begin{aligned} u_t &= u_s \cos\psi + v_s \sin\psi\,, \\ v_t &= -u_s \sin\psi + v_s \cos\psi\,, \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} U_t &= U_s \cos\Psi + V_s \sin\Psi\,, \\ V_t &= -U_s \sin\Psi + V_s \cos\Psi \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

und betrachtet man (Abb. 11) die in der Ebene ε liegenden Komponenten u_t, w_s bzw. U_t, W_s, so lauten die entsprechenden Gleichungen

$$v_t = V_t\,,$$

$$u_t \cos\frac{\chi}{2} - w_s \sin\frac{\chi}{2} = -U_t \cos\frac{\chi}{2} + W_s \sin\frac{\chi}{2}\,,$$

$$u_t \sin\frac{\chi}{2} + w_s \cos\frac{\chi}{2} = U_t \sin\frac{\chi}{2} + W_s \cos\frac{\chi}{2}\,,$$

oder wegen $\sin\frac{\chi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\chi)}$, $\cos\frac{\chi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\chi)}$

$$0 = v_t - V_t\,, \tag{6.10}$$

$$0 = (u_t + U_t)\sqrt{1+\cos\chi} - (w_s + W_s)\sqrt{1-\cos\chi}\,, \tag{6.11}$$

$$0 = (u_t - U_t)\sqrt{1-\cos\chi} + (w_s - W_s)\sqrt{1+\cos\chi}\,. \tag{6.12}$$

Die beiden Tangentialebenen, welche die Mittelflächen I bzw. II im Punkte P_s berühren, drehen sich um die Tangente t (d. i. ihre Schnittgerade) um gleiche Winkel, d. h. so, daß der von ihnen eingeschlossene Winkel konstant bleibt. Beschreibt man die Drehung der Tangentialebenen durch rechtsschraubende Drehvektoren ω_x, ω_y, ω_z bzw. Ω_X, Ω_Y, Ω_Z auf den Bezugsachsen x, y, z bzw. X, Y, Z (Abb. 12), so kommt

$$\omega_x = \frac{w^{\cdot}}{a}\,, \qquad \Omega_X = -\frac{W^{\cdot}}{A}\,,$$

$$\omega_y = -\frac{w'}{a}\,, \qquad \Omega_Y = \frac{W'}{A}\,,$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{v'}{a} - \frac{u^{\cdot}}{a}\right), \qquad \Omega_Z = \frac{1}{2}\left(\frac{U^{\cdot}}{A} - \frac{V'}{A}\right).$$

Der eingeschlossene Winkel bleibt konstant, wenn die auf t fallenden Komponenten

$$\omega_t = \omega_y \cos\psi - \omega_x \sin\psi\,,$$

$$\Omega_t = \Omega_Y \cos\Psi - \Omega_X \sin\Psi$$

der resultierenden Drehvektoren gleich sind ($0 = \omega_t - \Omega_t$):

$$0 = \frac{w'}{a}\cos\psi + \frac{w^{\cdot}}{a}\sin\psi + \frac{W'}{A}\cos\Psi + \frac{W^{\cdot}}{A}\sin\Psi\,. \tag{6.13}$$

c) Die Schnittkräfte und -momente, die im Übergangsquerschnitt vom Rohr I auf das Rohr II bzw. längs der Schnittkurve von der Mittelfläche I auf die Mittelfläche II und umgekehrt ausgeübt werden, sind nach dem Wechselwirkungsprinzip entgegengesetzt gleich. Im Punkte P_s der Schnittkurve wirken im Rohr I (Abb. 13) die Schnittkräfte

$$\left.\begin{aligned} n_s &= \frac{1}{2}(n_x + n_y) + \frac{1}{2}(n_x - n_y)\cos 2\psi + n_{xy}\sin 2\psi\,, \\ t_s &= -\frac{1}{2}(n_x - n_y)\sin 2\psi + n_{xy}\cos 2\psi\,, \\ q_s &= q_x \cos\psi + q_y \sin\psi \end{aligned}\right\} \tag{6.14}$$

und die Schnittmomente

$$\left.\begin{aligned} m_s &= \frac{1}{2}(m_x + m_y) + \frac{1}{2}(m_x - m_y)\cos 2\psi + m_{xy}\sin 2\psi\,, \\ m_{s\psi} &= -\frac{1}{2}(m_x - m_y)\sin 2\psi + m_{xy}\cos 2\psi\,, \end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

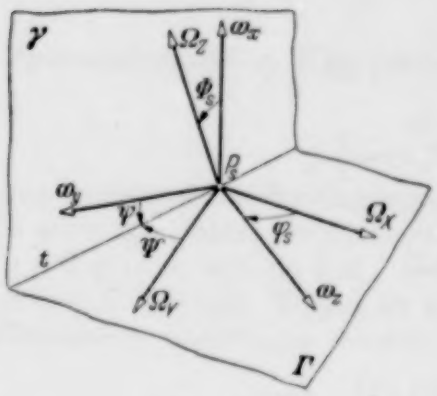


Abb. 12.

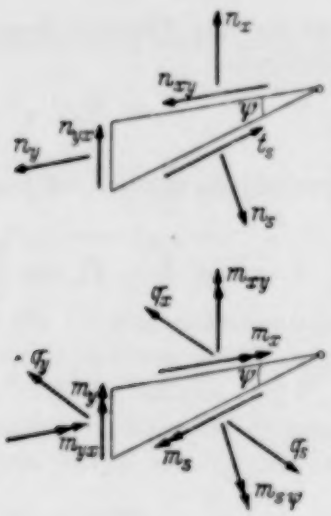


Abb. 13.

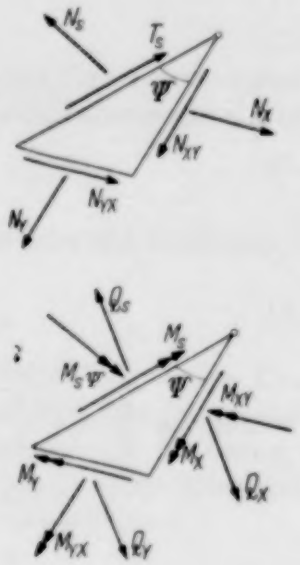


Abb. 14.

im Rohr *II* (Abb. 14) die Schnittkräfte

$$\left.\begin{aligned} N_s &= \frac{1}{2}(N_X + N_Y) + \frac{1}{2}(N_X - N_Y)\cos 2\Psi + N_{XY}\sin 2\Psi\,, \\ T_s &= -\frac{1}{2}(N_X - N_Y)\sin 2\Psi + N_{XY}\cos 2\Psi\,, \\ Q_s &= Q_X\cos\Psi + Q_Y\sin\Psi \end{aligned}\right\} \tag{6.16}$$

und die Schnittmomente

$$\left.\begin{aligned} M_s &= \frac{1}{2}(M_X + M_Y) + \frac{1}{2}(M_X - M_Y)\cos 2\Psi + M_{XY}\sin 2\Psi\,, \\ M_{s\Psi} &= -\frac{1}{2}(M_X - M_Y)\sin 2\Psi + M_{XY}\cos 2\Psi\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.17}$$

Die Kräfte t_s und T_s sowie die Momente m_s und M_s liegen auf der Tangente t, die Kräfte n_s, q_s, N_s und Q_s sowie die Momente $m_{s\psi}$ und $M_{s\Psi}$ sämtlich in der zu t senkrechten Ebene ε (Abb. 15). Die Querkräfte q_s und Q_s schließen den Winkel χ ein. Das Wechselwirkungsprinzip stellt die folgenden Bedingungen:

$$T_s = -t_s\,, \qquad M_s = m_s\,,$$

$$Q_s\cos\frac{\chi}{2} - N_s\sin\frac{\chi}{2} = -q_s\cos\frac{\chi}{2} + n_s\sin\frac{\chi}{2}\,,$$

$$Q_s\sin\frac{\chi}{2} + N_s\cos\frac{\chi}{2} = q_s\sin\frac{\chi}{2} + n_s\cos\frac{\chi}{2}$$

oder

$$0 = M_s - m_s\,, \tag{6.18}$$

$$0 = T_s + t_s\,, \tag{6.19}$$

$$0 = (Q_s + q_s)\sqrt{1+\cos\chi} - (N_s + n_s)\sqrt{1-\cos\chi}\,, \tag{6.20}$$

$$0 = (Q_s - q_s)\sqrt{1-\cos\chi} + (N_s - n_s)\sqrt{1+\cos\chi}\,. \tag{6.21}$$

Die Randbedingung für die Drillmomente $m_{s\psi}$ und $M_{s\psi}$ ergibt sich aus der Betrachtung eines Schalenelementes am Übergang zwischen den Rohren (Abb. 16). Die an den Schnittflächen des Elementes angreifenden Schubspannungen sind — nach den üblichen Voraussetzungen der Schalenbiegetheorie — lineare Funktionen der Koordinaten z oder $\zeta = 2\,z/h$ im Rohr I und Z oder $\zeta = 2\,Z/H$ im Rohr II. Aus den Schubspannungen resultieren die Schubkräfte

$$t_s = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\mathrm{I}}\, dz = \frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} \tau_{\mathrm{I}}\, d\zeta\,, \qquad T_s = \int_{-H/2}^{+H/2} \tau_{\mathrm{II}}\, dZ = \frac{H}{2} \int_{-1}^{+1} \tau_{\mathrm{II}}\, d\zeta \tag{6.22}$$

und die Drillmomente

$$m_{s\psi} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\mathrm{I}}\, z\, dz = \frac{h^2}{4} \int_{-1}^{+1} \tau_{\mathrm{I}}\, \zeta\, d\zeta\,, \qquad M_{s\Psi} = \int_{-H/2}^{+H/2} \tau_{\mathrm{II}}\, Z\, dZ = \frac{H^2}{4} \int_{-1}^{+1} \tau_{\mathrm{II}}\, \zeta\, d\zeta\,. \tag{6.23}$$

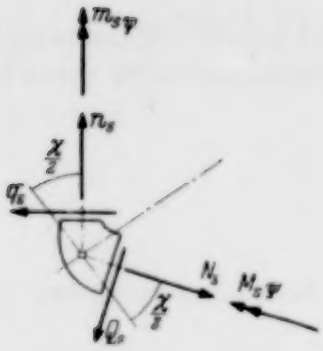


Abb. 15.

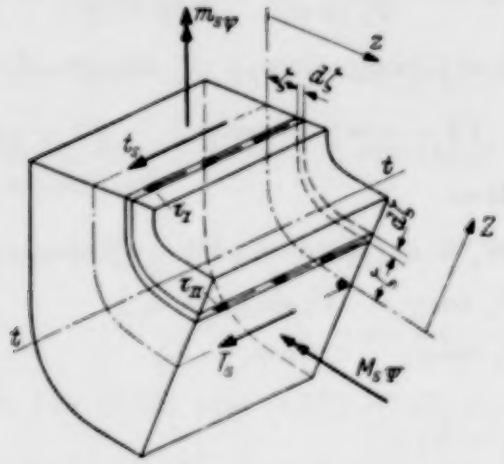


Abb. 16.

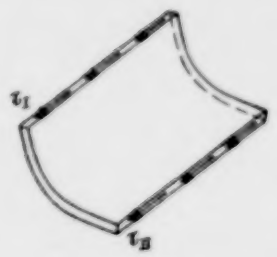


Abb. 17.

Jede unendlich dünne „Schicht", die man durch Schnitte längs $\zeta = \text{const}$ und $\zeta + d\zeta = \text{const}$ aus dem Element heraustrennt (Abb. 17), ist im Gleichgewicht, wenn die Schubspannungen der Bedingung

$$\tau_{\mathrm{I}} \frac{h}{2}\, d\zeta = -\,\tau_{\mathrm{II}} \frac{H}{2}\, d\zeta = dS$$

genügen. Damit folgt aus (6.22) und (6.23) zunächst

$$t_s = \int_{\zeta=-1}^{\zeta=+1} dS\,, \qquad T_s = -\int_{\zeta=-1}^{\zeta=+1} dS\,,$$

$$m_{s\psi} = \frac{h}{2} \int_{\zeta=-1}^{\zeta=+1} \zeta\, dS\,, \qquad M_{s\Psi} = -\frac{H}{2} \int_{\zeta=-1}^{\zeta=+1} \zeta\, dS$$

und schließlich die schon oben angegebene Randbedingung (6.19) und die weitere Randbedingung

$$0 = m_{s\psi}\, H + M_{s\Psi}\, h\,. \tag{6.24}$$

Ersetzt man hierin die Schubkräfte und Drillmomente mit Hilfe der Gleichungen (5.3), (5.11) und (6.14) bis (6.17) durch Ableitungen von w und f bzw. W und F, so kommt

$$0 = \frac{1}{2}\,(f^{\cdot\cdot} - f'')\sin 2\psi + f'^{\cdot}\cos 2\psi + \frac{1}{2}\,(F^{\cdot\cdot} - F'')\sin 2\Psi + F'^{\cdot}\cos 2\Psi\,,$$

$$0 = \frac{h^2}{a^2}\left[\frac{1}{2}\,(w^{\cdot\cdot} - w'')\sin 2\psi + w'^{\cdot}\cos 2\psi\right] + \frac{H^2}{A^2}\left[\frac{1}{2}\,(W^{\cdot\cdot} - W'')\sin 2\Psi + W'^{\cdot}\cos 2\Psi\right].$$

Nach Multiplikation der ersten Gleichung mit

$$i\,k = i\,K\,\frac{H^2}{A^2}\,\frac{a^2}{h^2}$$

und der zweiten mit a^2/h^2 erhält man durch Addition und mit $w + i\,k\,f = g$, $W + i\,K\,F = G$

$$0 = \frac{1}{2}\,(g'' - g'')\sin 2\,\psi + g'\cos 2\,\psi + \frac{H^2}{A}\,\frac{a^2}{h^2}\left[\frac{1}{2}\,(G'' - G'')\sin 2\,\Psi + G'\cos 2\,\Psi\right].$$

Die beiden Randbedingungen (6.19) und (6.24) erweisen sich hiermit als Bestandteile einer einzigen komplexen Bedingungsgleichung und sind also zwangsläufig beide erfüllt, wenn eine durch geeignete Wahl der in g bzw. G enthaltenen Integrationskonstanten c bzw. C befriedigt wird. Damit ist das vorliegende Randstörungsproblem zurückgeführt auf acht notwendige und zugleich hinreichende Randbedingungen, die in den Gleichungen (6.10) bis (6.13) und (6.18) bis (6.21) ausgedrückt sind.

Grenzfälle. a) Stimmen die mittleren Rohrhalbmesser überein ($a = A$, $\nu = 1$, Abb. 18), so ist

$$\Phi_s = \varphi_s\,, \qquad \psi = \Psi\,,$$

$$\sin\psi = C\cos\varphi_s\sin\varphi_s\,, \qquad \cos\psi = C\cos\varphi_s\,,$$

$$\cos\chi = \sin^2\varphi_s\,, \qquad \sqrt{1-\cos\chi} = \cos\varphi_s\,, \qquad \sqrt{1+\cos\chi} = \sqrt{1+\sin^2\varphi_s}\,.$$

Die Randbedingungen lauten dann

$$0 = (W_s - w_s)\sin\varphi_s + (V_s - v_s)\cos\varphi_s\,,$$
$$0 = W_s\cos\varphi_s - V_s\sin\varphi_s - u_s\,,$$
$$0 = w_s\cos\varphi_s - v_s\sin\varphi_s - U_s$$

oder

$$0 = v_i - V_i\,,$$
$$0 = (u_i + U_i)\sqrt{1+\sin^2\varphi_s} - (w_s + W_s)\cos\varphi_s\,,$$
$$0 = (u_i - U_i)\cos\varphi_s + (w_s - W_s)\sqrt{1+\sin^2\varphi_s}\,,$$
$$0 = (w' + W') + (w' + W')\sin\varphi_s\,,$$
$$0 = M_s - m_s\,,$$
$$0 = T_s + t_s\,,$$
$$0 = (Q_s + q_s)\sqrt{1+\sin^2\varphi_s} - (N_s + n_s)\cos\varphi_s\,,$$
$$0 = (Q_s - q_s)\cos\varphi_s + (N_s - n_s)\sqrt{1+\sin^2\varphi_s}\,.$$

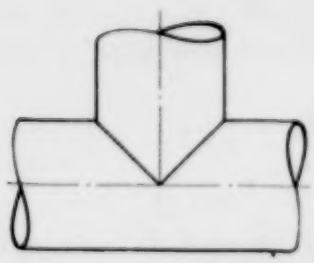


Abb. 18.

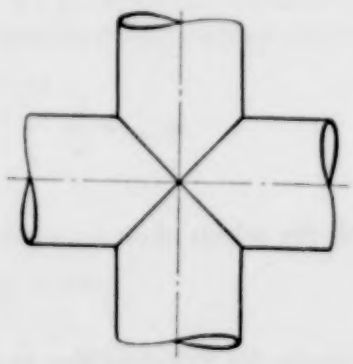


Abb. 19.

b) Die Rohrhalbmesser seien gleich groß ($\nu = 1$) und Rohr I zweige nach beiden Seiten von Rohr II, jeweils lotrecht zu dessen Achse, ab (Rohrkreuzung, Abb. 19). Die Schnittkurve zerfällt jetzt in zwei Ellipsen mit den Halbachsen a und $a\sqrt{2}$ in den beiden Ebenen, welche die rechten Winkel

zwischen den Rohrachsen jeweils halbieren und ebenfalls Symmetrieebenen sind. Daraus folgt, daß $u = U, v = V, w = W$ usw. ist. Von den Bedingungen des Grenzfalles a verbleiben infolgedessen nur

$$0 = w_s \cos\varphi_s - v_s \sin\varphi_s - u_s$$

oder

$$0 = u_i \sqrt{1 + \sin^2\varphi_s} - w_s \cos\varphi_s , \tag{6.25}$$

ferner

$$0 = w' + w^{\cdot} \sin\varphi_s , \tag{6.26}$$

$$0 = t_s , \tag{6.27}$$

$$0 = q_s \sqrt{1 + \sin^2\varphi_s} - n_s \cos\varphi_s . \tag{6.28}$$

c) Der Halbmesser a des Rohres I sei nicht größer als die Hälfte des Halbmessers A des Rohres II ($0 \leqq \nu \leqq 0{,}5$). Dann folgt aus (6.11) und (6.12) durch Addition bzw. Subtraktion und mit Hilfe der Näherung (2.12)

$$0 = u_i + w_s \frac{\nu}{4}(1 - \cos 2\varphi_s) + U_i \frac{\nu}{4}(1 - \cos 2\varphi_s) - W_s ,$$

$$0 = u_i \frac{\nu}{4}(1 - \cos 2\varphi_s) - w_s + U_i + W_s \frac{\nu}{4}(1 - \cos 2\varphi_s) .$$

Wird jetzt aus der ersten Gleichung U_i, aus der zweiten u_i eliminiert und werden dabei Glieder mit dem Faktor $\nu^2/16$ vernachlässigt, so kommt

$$0 = u_i + w_s \frac{\nu}{2}(1 - \cos 2\varphi_s) - W_s ,$$

$$0 = w_s - U_i - W_s \frac{\nu}{2}(1 - \cos 2\varphi_s) .$$

Durch entsprechende Umformung von (6.20) und (6.21) erhält man

$$0 = q_s + n_s \frac{\nu}{2}(1 - \cos 2\varphi_s) - N_s ,$$

$$0 = n_s - Q_s - N_s \frac{\nu}{2}(1 - \cos 2\varphi_s) .$$

Aufgrund der Näherung (2.10) ist im Bereich $0 \leqq \nu \leqq 0{,}5$

$$V_i = V^* , \qquad U_i = U^* , \qquad \frac{\partial W}{\partial X}\cos\Psi' + \frac{\partial W}{\partial Y}\sin\Psi' = \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{W'}{a} ,$$

$$M_s = M_r , \qquad T_s = N_{r\varphi} , \qquad Q_s = Q_r , \qquad N_s = N_r .$$

Benutzt man jetzt noch die Transformationsformeln (6.7), (6.14), (6.15) und die Näherungen (2.10) und (2.11), so lauten die Randbedingungen, wenn der Index s als Hinweis auf die Schnittkurve nicht mehr geschrieben wird,

$$0 = -u\,C\frac{\nu}{2}\sin 2\varphi + v - V^* , \tag{6.29}$$

$$0 = u + v\,C\frac{\nu}{2}\sin 2\varphi + w\frac{\nu}{2}(1 - \cos 2\varphi) - W , \tag{6.30}$$

$$0 = w - U^* - W\frac{\nu}{2}(1 - \cos 2\varphi) , \tag{6.31}$$

$$0 = w' + w^{\cdot}\,C\frac{\nu}{2}\sin 2\varphi + W' \qquad W' = \frac{\partial W}{\partial \varrho} , \tag{6.32}$$

$$0 = m_x + m_{xy}\,C\,\nu\sin 2\varphi - M_r , \tag{6.33}$$

$$0 = -(n_x - n_y)\,C\frac{\nu}{2}\sin 2\varphi + n_{xy} + N_{r\varphi} , \tag{6.34}$$

$$0 = q_x + q_y\,C\frac{\nu}{2}\sin 2\varphi + n_x\frac{\nu}{2}(1 - \cos 2\varphi) - N_r , \tag{6.35}$$

$$0 = n_x + n_{xy}\,C\,\nu\sin 2\varphi - Q_r - N_r\frac{\nu}{2}(1 - \cos 2\varphi) . \tag{6.36}$$

7. Die Lösung des Randwertproblems. Mit Rücksicht auf die Symmetriebedingungen (6.1) und (6.2) wählt man zweckmäßigerweise $p_\xi = \pm i\,n$ $(n = 0, 2, 4, \ldots)$, so daß

$$g_n = c_n\, e^{p_\xi \xi}\,(e^{i n \varphi} + e^{-i n \varphi}) = (a_n + i\, b_n)\, e^{p_\xi \xi} \cos n\,\varphi\,. \tag{7.1}$$

Wegen des Abklingens der Randstörungen kommen von den Eigenwerten p_ξ nur diejenigen mit negativem Realteil in Betracht:

$$p_{\xi 1} = -\lambda_1 - i\,\omega_1\,, \qquad p_{\xi 2} = -\lambda_2 + i\,\omega_2\,.$$

Aus (5.20) erhält man

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\vartheta}{2}\,(W^+ + 1)\,, & \lambda_2 &= \frac{\vartheta}{2}\,(W^+ - 1)\,,\\ \omega_1 &= \frac{\vartheta}{2}\,(W^- + 1)\,, & \omega_2 &= \frac{\vartheta}{2}\,(1 - W^-)\,,\\ & W^\pm = \sqrt{\sqrt{\frac{4\,n^4}{\vartheta^4} + 1} \pm \frac{2\,n^2}{\vartheta^2}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

Zerlegt man

$$\begin{aligned} g_n = w_n + i\,k\,f_n = {} & (a_{n1} + i\,b_{n1})\,(\cos\omega_1\xi - i\sin\omega_1\xi)\,e^{-\lambda_1\xi}\cos n\,\varphi\\ & + (a_{n2} + i\,b_{n2})\,(\cos\omega_2\xi + i\sin\omega_2\xi)\,e^{-\lambda_2\xi}\cos n\,\varphi \end{aligned}$$

in Real- und Imaginärteil, so kommt

$$\begin{aligned} w_n = {} & (a_{n1}\cos\omega_1\xi + b_{n1}\sin\omega_1\xi)\,e^{-\lambda_1\xi}\cos n\,\varphi\\ & + (a_{n2}\cos\omega_2\xi - b_{n2}\sin\omega_2\xi)\,e^{-\lambda_2\xi}\cos n\,\varphi = \bar{w}_n\cos n\,\varphi\,, \end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned} k\,f_n = {} & (b_{n1}\cos\omega_1\xi - a_{n1}\sin\omega_1\xi)\,e^{-\lambda_1\xi}\cos n\,\varphi\\ & + (b_{n2}\cos\omega_2\xi + a_{n2}\sin\omega_2\xi)\,e^{-\lambda_2\xi}\cos n\,\varphi = k\,\bar{f}_n\cos n\,\varphi\,. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Aus w_n und f_n berechnet man mit Hilfe von (5.1) bis (5.3) und (5.11) bis (5.13) alle übrigen Verschiebungen und Schnittgrößen, die sämtlich in der Form

$$\delta\left\{\begin{aligned} & [(\alpha_1\,a_{n1} - \beta_1\,b_{n1})\cos\omega_1\xi + (\beta_1\,a_{n1} + \alpha_1\,b_{n1})\sin\omega_1\nu]\,e^{-\lambda_1\xi}\\ & + [(\alpha_2\,a_{n2} + \beta_2\,b_{n2})\cos\omega_2\xi + (\beta_2\,a_{n2} - \alpha_2\,b_{n2})\sin\omega_2\xi]\,e^{-\lambda_1\xi} \end{aligned}\right\}$$

erscheinen. Die Koeffizienten $\delta, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ entnimmt man Tabelle 1. Alle Zustandsgrößen stellen sich dar als Produkte aus $\sin n\,\varphi$ oder $\cos n\,\varphi$ und einem nur von ξ abhängigen Faktor, der wie in (7.3) und (7.4) durch Querstrich gekennzeichnet sei.

Eine der Lösung (7.1) entsprechende Funktion für Rohr II

$$G_N = (A_N + i\,B_N)\,e^{P_\Xi\,\Xi}\cos N\,\Phi$$

mit

$$P_{\Xi 1} = -\Lambda_1 - i\,\Omega_1\,, \qquad P_{\Xi 2} = -\Lambda_2 + i\,\Omega_2$$

würde die Symmetriebedingungen (6.3) und (6.4) automatisch erfüllen.

Im Hinblick auf die Bedingungen (6.5) und (6.6) beachte man zunächst, daß auch W'' und M_{XY} verschwinden, wenn $W' = 0$ ist für alle Φ, und daß die Bedingungen $U = 0$ und $N_{XY} = 0$ zugleich $V' = 0$ erfassen. Es sind daher statt scheinbar sechs tatsächlich nur vier Bedingungen vorgegeben. Sie können jedoch nur mit der trivialen Lösung $A_{N1} = A_{N2} = B_{N1} = B_{N2} = 0$ erfüllt werden. Auch der Verzicht auf die Erfüllung unwesentlicher Bedingungen — etwa $U = 0$ oder $N_{XY} = 0$ oder beide — bringt nur geringen Nutzen, denn obwohl jetzt die Konstanten nicht sämtlich verschwinden und eine oder zwei der Konstanten frei bleiben, ist eine geschlossene Anpassung der Lösung an die Randbedingungen aus folgenden Gründen nicht möglich:

Alle Größen, die den Randbedingungen zu unterwerfen sind, müssen als Funktionen einer laufenden Koordinate der Schnittkurve — z. B. φ_s — dargestellt und dann die Konstanten a_{n1}, A_{N1} usw. so bestimmt werden, daß die Randbedingungen im Bereich $0 \leqq \varphi_s \leqq \pi/2$ für jeden Wert

Tabelle 1

	δ	α_1	β_1	α_2	β_2
u	$\frac{1}{2\vartheta^2}\cos n\varphi$	$\mu\omega_1-\omega_2$	$-\mu\lambda_1-\lambda_2$	$-\mu\omega_2+\omega_1$	$\mu\lambda_1+\lambda_1$
v	$\frac{1}{2n\vartheta^2}\sin n\varphi$	$\vartheta(\lambda_2-\omega_2)$	$-\vartheta(\lambda_1-\omega_1)-(1+\mu)n^2$	$-\vartheta(\lambda_1+\omega_1)$	$-\vartheta(\lambda_2+\omega_1)+(1+\mu)n^2$
w	$\cos n\varphi$	1	0	1	0
w'	$\cos n\varphi$	$-\lambda_1$	$-\omega_1$	$-\lambda_2$	$-\omega_1$
n_x	$\frac{n^2}{k}\cos n\varphi$	0	1	0	1
n_y	$\frac{1}{k}\cos n\varphi$	$\vartheta(\lambda_1+\omega_1)$	$-\vartheta(\lambda_1-\omega_1)-n^2$	$-\vartheta(\lambda_2-\omega_2)$	$-\vartheta(\lambda_1+\omega_1)+n^2$
n_{xy}	$\frac{n}{k}\sin n\varphi$	$-\omega_1$	λ_1	ω_2	$-\lambda_2$
q_x	$\frac{1}{2k\vartheta}\cos n\varphi$	$2\vartheta\omega_1-n^2$	$-2\vartheta\lambda_1-n^2$	$-2\vartheta\omega_2+n_2$	$2\vartheta\lambda_2-n^2$
q_y	$\frac{n}{2k\vartheta}\sin n\varphi$	$-(\lambda_1-\omega_1)$	$-(\lambda_1+\omega_1)$	$\lambda_2+\omega_2$	$-(\lambda_2-\omega_2)$
m_x	$\frac{a}{2k\vartheta^2}\cos n\varphi$	$\vartheta(\lambda_1-\omega_1)+(1-\mu)n^2$	$\vartheta(\lambda_1+\omega_1)$	$-\vartheta(\lambda_2+\omega_2)+(1-\mu)n^2$	$\vartheta(\lambda_2-\omega_2)$
m_y	$\frac{a}{2k\vartheta^2}\cos n\varphi$	$\mu\vartheta(\lambda_1-\omega_1)-(1-\mu)n^2$	$\mu\vartheta(\lambda_1+\omega_1)$	$-\mu\vartheta(\lambda_2+\omega_2)-(1-\mu)n^2$	$\mu\vartheta(\lambda_2-\omega_2)$
m_{xy}	$\frac{na}{2k\vartheta^2}\sin n\varphi$	λ_1	ω_1	λ_2	ω_2

des Winkels φ_s erfüllt sind. Man hat dabei die Kreisfunktionen der Winkel ψ, Ψ, χ nach (2.2) bis (2.5) und ferner die Argumente ξ_s, Ξ_s, Φ_s der Kreisfunktionen in den Lösungen g bzw. G mittels (2.1), (2.6) und (2.7) durch Funktionen des Winkels φ_s zu ersetzen.

Es entstehen dabei Ausdrücke von der Form

$$e^{\lambda_1\left(\frac{1}{\nu^2}-\sin^2\varphi_s\right)^{1/2}}\cos\left(\omega_1\left[\frac{1}{\nu^2}-\sin^2\varphi_s\right]^{1/2}\right)\frac{(1-\nu\sin^2\varphi_s)^{1/2}}{(1-\nu^2\sin^4\varphi_s)^{1/2}}\left(\frac{1}{\nu^2}-\sin^2\varphi_s\right)\cos n\varphi_s$$

oder

$$e^{\Lambda_1\nu\cos\varphi_s}\cos(\Omega_1\nu\cos\varphi_s)\cos[N\arcsin(\nu\sin\varphi_s)]\,C^2[\cos^2\varphi_s-\sin^2\varphi_s(1-\nu^2\sin^2\varphi_s)](1+\nu\sin^2\varphi_s)^{1/2},$$

d. h. die Bestimmungsgleichungen für die Konstanten enthalten von φ_s abhängige Koeffizienten, die sich nicht herauskürzen lassen. Um diese Schwierigkeit zu überwinden, kann man die Randbedingungen in einzelnen Punkten der Schnittkurve befriedigen, indem man — falls j die Zahl der über den Bereich $0\leqq\varphi_s\leqq\pi/2$ verteilten Punkte ist — so viele Lösungen g_n und G_N superponiert, daß $8j$ freie Konstanten zur Verfügung stehen. Da wenigstens in drei Punkten (z. B. $\varphi_s=0$, $\pi/4$, $\pi/2$) die Randbedingungen erfüllt werden sollten, sind mindestens 24 Konstanten zu bestimmen, wobei allein die Berechnung der 24^2 Koeffizienten in den 24 Bestimmungsgleichungen einen erheblichen Aufwand an numerischer Rechenarbeit darstellt.

Beschränkt man sich jedoch auf kleine Radienverhältnisse ν, so fällt die Schnittkurve innerhalb der Mittelfläche I ausreichend genau auf einen Umfangskreis mit der Koordinate $x_s=A$, innerhalb der Mittelfläche II sehr genau auf einen Kreis mit dem Radius a. Die Randbedingungen sind jetzt einerseits für $\xi_s=1/\nu$ und andererseits für $\varrho=1$ zu erfällen. Hierzu eignet sich für Rohr I die Reihe

$$g=\sum_n c_n e^{p_\xi(\xi-\xi_s)}\cos n\varphi \qquad n=0,2,4\ldots \tag{7.5}$$

die aus (7.1) durch eine Verschiebung des Nullpunkts der Koordinate ξ hervorgeht, und für Rohr II in Anlehnung an (7.5) eine Lösung in der Form

$$G = \sum_n \Pi_n(\varrho) \cos n\varphi \qquad n = 0, 2, 4 \ldots \tag{7.6}$$

in der $\Pi_n(\varrho)$ eine Funktion nur von ϱ ist und mit wachsendem ϱ ähnlich einer Exponentialfunktion mit komplexem Exponenten abklingen soll. Die strenge Lösung der Differentialgleichung (5.25), d. i. die Funktion (5.28), läßt sich nicht in dieser Form darstellen, da sie in bezug auf $\varphi = \pm \pi/2$ nicht symmetrisch ist.

Setzt man (7.6) in (5.25) ein, so erhält man als Differentialgleichung für Π_n

$$\left.\begin{aligned} &\sum_n \Big\{\Big[\Delta^* \Delta^* \Pi_n + \eta^2 \Delta^* \Pi_n + \eta^2 \left(\Pi_n'' - \frac{1}{\varrho}\Pi_n' + \frac{n^2}{\varrho^2}\Pi_n\right)\cos 2\varphi\Big] \cos n\varphi \\ &\quad - 2\eta^2 \left(\frac{n}{\varrho^2}\Pi_n - \frac{n}{\varrho}\Pi_n'\right) \sin 2\varphi \sin n\varphi\Big\} = 0 \\ &\Delta^* \equiv \frac{d^2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho} - \frac{n^2}{\varrho^2} \end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

oder wegen

$$\left.\begin{aligned} \cos 2\varphi \cos n\varphi &= \frac{1}{2}\cos(n-2)\varphi + \frac{1}{2}\cos(n+2)\varphi\,, \\ \sin 2\varphi \sin n\varphi &= \frac{1}{2}\cos(n-2)\varphi - \frac{1}{2}\cos(n+2)\varphi \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

auch

$$\begin{aligned} \sum_n \Big[&\Delta^* \Delta^* \Pi_n + \eta^2 \Delta^* \Pi_n + \frac{1}{2}\eta^2 \left(\Pi_{n-2}'' - \frac{2n-3}{\varrho}\Pi_{n-2}' + \frac{n^2-2n}{\varrho^2}\Pi_{n-2}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\eta^2 \left(\Pi_{n+2}'' + \frac{2n+3}{\varrho}\Pi_{n+2}' + \frac{n^2+2n}{\varrho^2}\Pi_{n+2}\right)\Big] \cos n\varphi = 0\,. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Damit (7.9) für alle φ erfüllt ist, muß jedes Glied der Summe $\sum$ für sich verschwinden, d. h. (7.9) zerfällt in ebenso viele Gleichungen, wie Glieder in der Reihe (7.6) verwendet werden. Jedes Glied Π_n ist dabei mit den „benachbarten" Gliedern Π_{n-2} und Π_{n+2} gekoppelt. Da jedoch der Kopplungsfaktor η^2 mit dem Quadrat des Radienverhältnisses abnimmt, kann bei kleinem Radienverhältnis die Kopplung vernachlässigt werden.

Die Differentialgleichung für Π_n lautet dann

$$\Delta^* \Delta^* \Pi_n + \eta^2 \Delta^* \Pi_n = 0 \tag{7.10}$$

und ihre bereits auf abklingende Funktionen beschränkte Lösung

$$\Pi_n = C_{n1}\frac{1}{\varrho^n} + C_{n2} H_n^{(1)}(\eta\,\varrho) \tag{7.11}$$

hat die hinreichend einfache Form, die im Hinblick auf Anzahl und Gestalt der Randbedingungen notwendig erscheint, um die numerische Rechenarbeit in angemessenen Grenzen zu halten. *Withum*[1] hat bei der Behandlung eines wesentlich einfacheren Randwertproblems mit Hilfe der Störungsrechnung eine strengere Lösung des Systems (7.9) entwickelt, die grundsätzlich auch hier angewendet werden kann. Allerdings ergibt sich dann jedes Glied Π_n der Reihe (7.6) selbst als Funktionsreihe

$$\Pi_n = \Pi_{n0} + \Pi_{n1} + \Pi_{n2} + \cdots$$

so daß der Umfang numerischer Rechnungen im Vergleich zur einfachen Lösung (7.11) erheblich ansteigt.

Bezeichnet R_n bzw. J_n den Real- bzw. Imaginärteil der in (7.11) enthaltenen *Hankel*schen Funktion erster Art

$$H_n^{(1)}\left(\sqrt{i}\,\Theta\,\nu\,\varrho\right) = R_n + i\,J_n\,,$$

[1] siehe Fußnote 4, Seite 293.

so ergeben sich aus der komplexen Funktion

$$G_n = W_n - i\,K\,\nu^2\,F_n = \left[(A_{n1} - i\,B_{n1})\,\frac{1}{\varrho^n} + (A_{n2} - i\,B_{n2})\,(R_n + i\,J_n)\right]\cos n\,\varphi$$

durch Zerlegen in Real- und Imaginärteil die Verschiebung

$$W_n = \left[\frac{A_{n1}}{\varrho^n} + A_{n2}\,R_n + B_{n2}\,J_n\right]\cos n\,\varphi = \overline{W}_n \cos n\,\varphi \tag{7.12}$$

und die Spannungsfunktion

$$K\,\nu^2\,F_n = \left[\frac{B_{n1}}{\varrho^n} + B_{n2}\,R_n - A_{n2}\,J_n\right]\cos n\,\varphi = K\,\nu^2\,\overline{F}_n \cos n\,\varphi \tag{7.13}$$

und hieraus schließlich alle übrigen Verschiebungen und Schnittgrößen mittels (5.21) bis (5.24), jeweils in der Form von Produkten aus $\sin n\,\varphi$ oder $\cos n\,\varphi$ und einem nur von ϱ abhängigen Faktor, der wie in (7.12) und (7.13) durch Querstrich gekennzeichnet sei.

Die Verschiebungen U_n und V_n sind infolge der Koeffizienten $\sin^2\varphi$, $\cos^2\varphi$ und $\sin 2\,\varphi$ in (5.21) nicht allein mit W_n sondern auch mit W_{n-2} und W_{n+2} gekoppelt. Diese Glieder entsprechen den Koppelgliedern in (7.9) und werden wie die letzteren vernachlässigt. Es gelten dann die Gleichungen

$$a\,\varepsilon_{rn} = U_n' + \frac{\nu}{2}\,W_n\,, \qquad a\,\varepsilon_{\varphi n} = \frac{1}{\varrho}\,(V_n + U_n) + \frac{\nu}{2}\,W_n\,,$$

$$a\,\gamma_{r\varphi n} = \frac{1}{\varrho}\,(U_n' - V_n) + V_n'$$

oder nach Kürzen durch $\sin n\,\varphi$ bzw. $\cos n\,\varphi$

$$a\,\bar{\varepsilon}_{rn} = \frac{a}{E\,H}\left(-\mu\,\overline{F}_n'' + \frac{1}{\varrho}\,\overline{F}_n' - \frac{n^2}{\varrho^2}\,\overline{F}_n\right) = \overline{U}_n' + \frac{\nu}{2}\,\overline{W}_n\,,$$

$$a\,\bar{\varepsilon}_{\varphi n} = \frac{a}{E\,H}\left(\overline{F}_n'' - \frac{\mu}{\varrho}\,\overline{F}_n' + \mu\,\frac{n^2}{\varrho^2}\,\overline{F}_n\right) = \frac{1}{\varrho}\,\overline{U}_n + \frac{n}{\varrho}\,\overline{V}_n + \frac{\nu}{2}\,\overline{W}_n\,,$$

$$a\,\bar{\gamma}_n = \frac{a}{E\,H}\,2\,(1+\mu)\,n\left(\frac{1}{\varrho}\,\overline{F}_n' - \frac{1}{\varrho^2}\,\overline{F}_n\right) = -\frac{n}{\varrho}\,\overline{U}_n + \overline{V}_n' - \frac{1}{\varrho}\,\overline{V}_n\,.$$

Hieraus berechnet man leicht U_n und V_n, wobei für die aus der *Hankel*schen Funktion abstammenden Glieder zweckmäßigerweise die aus (7.10) abgeleitete Beziehung $E\,H\,\nu\,\overline{W}_n = 2\,a\,\Delta^*\,\overline{F}_n$ benutzt wird. Man beachte, daß in (5.21) und den daraus entwickelten Gleichungen $U = U^*$ und $V = V^*$ ist. Die Verschiebungen und Schnittgrößen lassen sich jetzt alle in der Form

$$\hat{\delta}\,(\hat{\alpha}_1\,A_{n1} + \hat{\beta}_1\,B_{n1} + \hat{\alpha}_2\,A_{n2} + \hat{\beta}_2\,B_{n2})$$

darstellen. Die Koeffizienten $\hat{\delta}$, $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\beta}_2$ entnimmt man Tabelle 2. Die Ableitungen der Zylinderfunktionen R_n und J_n nach ϱ bestimmt man mit Hilfe der Formeln

$$R_n' = -\frac{n}{\varrho}\,R_n + \Theta\,\nu\,R_{n-1}\,, \qquad J_n' = -\frac{n}{\varrho}\,J_n + \Theta\,\nu\,J_{n-1}\,,$$

$$R_n'' = \frac{n^2+n}{\varrho^2}\,R_n + \Theta^2\,\nu^2\,J_n - \frac{\Theta\,\nu}{\varrho}\,R_{n-1}\,, \qquad J_n'' = \frac{n^2+n}{\varrho^2}\,J_n - \Theta^2\,\nu^2\,R_n - \frac{\Theta\,\nu}{\varrho}\,J_{n-1}\,,$$

$$R_{n-1} + i\,J_{n-1} = \sqrt{i}\,H_{n-1}^{(1)}\,(\sqrt{i}\,\Theta\,\nu\,\varrho)\,.$$

Die Funktionen n-ter und $(n-1)$-ter Ordnung ergeben sich nach bekannten Beziehungen aus den Funktionen nullter und erster Ordnung.

Für $n = 0$ verwendet man, abweichend von (7.11), statt $C_{n1}\,\frac{1}{\varrho^n}$ die Funktion $i\,B_{01}\ln\varrho$ und die davon abgeleiteten Größen

$$U = -\frac{1+\mu}{2\,\nu\,\Theta^2}\,\frac{B_{01}}{\varrho}\,,$$

$$N_r = \frac{1}{K\,\nu^2}\,\frac{B_{01}}{\varrho^2}\,, \qquad N_\varphi = -\frac{1}{K\,\nu^2}\,\frac{B_{01}}{\varrho^2}\,.$$

Tabelle 2

	$\hat{\delta}$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_2$
U	$\frac{1+\mu}{2\,\nu\,\Theta^2}\cos n\varphi$	$\frac{\nu^2\,\Theta^2}{(1+\mu)\,(n-1)}\,\varrho^{-n-1}$	$n\,\varrho^{-n-1}$	J'_n	$-R'_n$
V	$\frac{1+\mu}{2\,\nu\,\Theta^2}\sin n\varphi$	$\frac{\nu^2\,\Theta^2}{(1+\mu)\,(n-1)}\,\varrho^{-n-1}$	$n\,\varrho^{-n-1}$	$-\frac{n}{\varrho}\,J_n$	$\frac{n}{\varrho}\,R_n$
W	$\cos n\varphi$	ϱ^{-n}	0	R_n	J_n
W'	$\cos n\varphi$	$-n\,\varrho^{-n-1}$	0	R'_n	J'_n
N_r	$\frac{1}{K\,\nu^2\,\varrho}\cos n\varphi$	0	$-n\,(n+1)\,\varrho^{-n-1}$	$-J'_n+\frac{n^2}{\varrho}\,J_n$	$R'_n-\frac{n^2}{\varrho}\,R_n$
N_φ	$\frac{1}{K\,\nu^2}\cos n\varphi$	0	$n\,(n+1)\,\varrho^{-n-2}$	$-J''_n$	R''_n
$N_{r\varphi}$	$\frac{n}{K\,\nu^2}\sin n\varphi$	0	$-(n+1)\,\varrho^{-n-1}$	$-J'_n+\frac{1}{\varrho}\,J_n$	$R'_n-\frac{1}{\varrho}\,R_n$
Q_r	$\frac{1}{2\,K\,\nu}\cos n\varphi$	0	0	J'_n	$-R'_n$
Q_φ	$\frac{1}{2\,K\,\nu}\,\frac{n}{\varrho}\sin n\varphi$	0	0	$-J_n$	R_n
M_r	$\frac{a}{2\,K\,\Theta^2\,\nu^3}\cos n\varphi$	$(1-\mu)\,n(n+1)\,\varrho^{-n-2}$	0	$\mu\,\Theta^2\nu^2\,J_n+(1-\mu)\,R''_n$	$-\mu\,\Theta^2\nu^2\,R_n+(1-\mu)\,J''_n$
M_φ	$\frac{a}{2\,K\,\Theta^2\,\nu^3}\cos n\varphi$	$-(1-\mu)\,n(n+1)\,\varrho^{-n-2}$	0	$\Theta^2\nu^2\,J_n-(1-\mu)\,R''_n$	$-\Theta^2\nu^2\,R_n-(1-\mu)\,J''_n$
$M_{r\varphi}$	$\frac{a(1-\mu)}{2\,K\,\Theta^2\,\nu^3}\,\frac{n}{\varrho}\sin n\varphi$	$(n+1)\,\varrho^{-n-1}$	0	$-R'_n+\frac{1}{\varrho}\,R_n$	$-J'_n+\frac{1}{\varrho}\,J_n$

8. Die expliziten Randbedingungen bei kleinem Radienverhältnis ν. Setzt man die aus Grundspannungszustand und Randstörung insgesamt hervorgehenden Zustandsgrößen

$$w=\widetilde{w}+\sum_n \overline{w}_n\cos n\varphi\,,\qquad W=\widetilde{W}+\sum_n \overline{W}_n\cos n\varphi\qquad\text{usw.}\tag{8.1}$$

in die Randbedingungen (6.29) bis (6.36) ein und verwendet man zur weiteren Umformung die goniometrischen Formeln (7.8) sowie

$$\left.\begin{aligned}\sin 2\varphi\cos n\varphi&=\frac{1}{2}\sin(n+2)\varphi-\frac{1}{2}\sin(n-2)\varphi\,,\\ \cos 2\varphi\sin n\varphi&=\frac{1}{2}\sin(n+2)\varphi+\frac{1}{2}\sin(n-2)\varphi\end{aligned}\right\}\tag{8.2}$$

und die Reihenentwicklung

$$C\,\nu=\nu\,(1-\nu^2\sin^4\varphi)^{-\frac{1}{2}}=\nu+\frac{1}{2}\,\nu^3\sin^4\varphi+\frac{3}{8}\,\nu^5\sin^8\varphi+\cdots,$$

so erhält man bei Vernachlässigung von Gliedern, die ν^3 und höhere Potenzen von ν als Faktoren enthalten, das folgende Gleichungssystem:

$$0=-\widetilde{u}\,\frac{\nu}{2}\sin 2\varphi-\frac{\nu}{4}\sum_n(\overline{u}_{n-2}-\overline{u}_{n+2})\sin n\varphi+\sum_n\overline{v}_n\sin n\varphi-\widetilde{V}^*-\sum_n V_n^*\sin n\varphi\,,\tag{8.3}$$

$$\begin{aligned}0=\widetilde{u}+\sum_n\overline{u}_n\cos n\varphi+\frac{\nu}{4}\sum_n(\overline{v}_{n+2}-\overline{v}_{n-2})\cos n\varphi+\frac{\nu}{2}\,\widetilde{w}\,(1-\cos 2\varphi)\\ +\frac{\nu}{2}\sum_n\overline{w}_n\cos n\varphi-\frac{\nu}{4}\sum_n(\overline{w}_{n+2}+\overline{w}_{n-2})\cos n\varphi-\widetilde{W}-\sum_n\overline{W}_n\cos n\varphi\,,\end{aligned}\tag{8.4}$$

$$0 = \widetilde{w} + \sum_n \overline{w}_n \cos n\varphi - \widetilde{U}^* - \sum_n \overline{U}_n^* \cos n\varphi - \widetilde{W}\frac{\nu}{2}(1 - \cos 2\varphi)$$
$$- \frac{\nu}{2}\sum_n \overline{W}_n \cos n\varphi + \frac{\nu}{4}\sum_n (\overline{W}_{n+2} + \overline{W}_{n-2}) \cos n\varphi , \tag{8.5}$$

$$0 = \sum_n \overline{w}'_n \cos n\varphi - \frac{\nu}{4}\sum_n [(n+2)\,\overline{w}_{n+2} - (n-2)\,\overline{w}_{n-2}] \cos n\varphi + \sum_n \overline{W}'_n \cos n\varphi , \tag{8.6}$$

$$0 = \sum_n \overline{m}_{xn} \cos n\varphi + \frac{\nu}{2}\sum_n (\overline{m}_{xy(n+2)} - \overline{m}_{xy(n-2)}) \cos n\varphi - \sum_n \overline{M}_{rn} \cos n\varphi , \tag{8.7}$$

$$0 = -\frac{\nu}{2}(\widetilde{n}_x - \widetilde{n}_y) \sin 2\varphi - \frac{\nu}{4}\sum_n [(\overline{n}_x - \overline{n}_y)_{n-2} - (\overline{n}_x - \overline{n}_y)_{n+2}] \sin n\varphi$$
$$+ \sum_n \overline{n}_{xyn} \sin n\varphi + \widetilde{N}_{r\varphi} + \sum_n \overline{N}_{r\varphi n} \sin n\varphi , \tag{8.8}$$

$$0 = \sum_n \overline{q}_{xn} \cos n\varphi + \frac{\nu}{4}\sum_n (\overline{q}_{y(n+2)} - \overline{q}_{y(n-2)}) \cos n\varphi + \widetilde{n}_x \frac{\nu}{2}(1 - \cos 2\varphi)$$
$$+ \frac{\nu}{2}\sum_n \overline{n}_{xn} \cos n\varphi - \frac{\nu}{4}\sum_n (\overline{n}_{x(n+2)} + \overline{n}_{x(n-2)}) \cos n\varphi - \widetilde{N}_r - \sum_n \overline{N}_{rn} \cos n\varphi , \tag{8.9}$$

$$0 = \widetilde{n}_x + \sum_n \overline{n}_{xn} \cos n\varphi + \frac{\nu}{2}\sum_n (\overline{n}_{xy(n+2)} - \overline{n}_{xy(n+2)}) \cos n\varphi - \sum_n \overline{Q}_{rn} \cos n\varphi$$
$$- \frac{\nu}{2}\widetilde{N}_r (1 - \cos 2\varphi) - \frac{\nu}{2}\sum_n \overline{N}_{rn} \cos n\varphi + \frac{\nu}{4}\sum_n (\overline{N}_{r(n+2)} + \overline{N}_{r(n-2)}) \cos n\varphi . \tag{8.10}$$

Die Form der in Abschnitt 4 angegebenen Grund-Zustandsgrößen — von φ unabhängige und mit $\sin 2\varphi$ bzw. $\cos 2\varphi$ veränderliche Glieder — verlangt, daß die Randstörungsgrößen mindestens die ersten zwei Glieder der Summen $\sum$ in (8.1), also $\overline{w}_0 + \overline{w}_2 \cos 2\varphi$, $\overline{W}_0 + \overline{W}_2 \cos 2\varphi$ usw. enthalten und die Bedingungen (8.3) bis (8.10) mindestens für $n = 0$ und $n = 2$ erfüllen. Um die Genauigkeit der Lösung zu erhöhen und die Konvergenz der Reihen beurteilen zu können, wird man auch $\overline{w}_4 \cos 4\varphi$, $\overline{W}_4 \cos 4\varphi$ usw. in die Rechnung einbeziehen und die Randbedingungen auch für $n = 4$ erfüllen. Da die von φ unabhängigen Spannungszustände keine Verschiebungen v bzw. V^* und keine Schubkräfte n_{xy} bzw. $N_{r\varphi}$ liefern, sind die Bedingungen (8.3) und (8.8) für $n = 0$ automatisch erfüllt und es verbleiben in diesem Falle noch sechs Bedingungen:

$$0 = \overline{u}_0 + \frac{\nu}{4}\overline{v}_2 + \frac{\nu}{2}\frac{p\,a^2}{E\,h}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) + \frac{\nu}{2}\overline{w}_0 - \frac{\nu}{4}\overline{w}_2 - \frac{p\,A^2}{E\,H}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) - \overline{W}_0 , \tag{8.11}$$

$$0 = \frac{p\,a^2}{E\,h}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) + \overline{w}_0 - \frac{\nu}{4}\frac{p\,A^2}{E\,H}(1 - 2\,\mu) - \overline{U}_0 - \frac{\nu}{2}\frac{p\,A^2}{E\,H}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) - \frac{\nu}{2}\overline{W}_0 + \frac{\nu}{4}\overline{W}_2 , \tag{8.12}$$

$$0 = \overline{w}'_0 + \overline{W}'_0 - \frac{\nu}{2}\overline{w}_2 , \tag{8.13}$$

$$0 = \overline{m}_{x0} + \frac{\nu}{2}\overline{m}_{xy2} - \overline{M}_{r0} , \tag{8.14}$$

$$0 = \overline{q}_{x0} + \frac{\nu}{4}\overline{q}_{y2} + \frac{\nu}{2}\frac{p\,a}{2} + \frac{\nu}{2}\overline{n}_{x0} - \frac{\nu}{4}\overline{n}_{x2} - \frac{3}{4}\,p\,A - \overline{N}_{r0} , \tag{8.15}$$

$$0 = \frac{p\,a}{2} + \overline{n}_{x0} + \frac{\nu}{2}\overline{n}_{xy2} - \overline{Q}_{r0} - \frac{\nu}{2}\overline{N}_{r0} + \frac{\nu}{4}\overline{N}_{r2} - \frac{\nu}{2}\frac{7}{8}\,p\,A . \tag{8.16}$$

Für $n = 2$ gelten acht Bedingungen

$$0 = -\frac{\nu}{2}\overline{u}_0 + \overline{v}_2 + \frac{\nu}{4}\frac{p\,A^2}{E\,H}(1 - 2\,\mu) - \overline{V}_2^* + \frac{\nu}{4}\overline{u}_4 , \tag{8.17}$$

$$0 = \overline{u}_2 - \frac{\nu}{2}\frac{p\,a^2}{E\,h}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) + \frac{\nu}{2}\overline{w}_2 - \frac{\nu}{2}\overline{w}_0 - \overline{W}_2 + \frac{\nu}{4}\overline{v}_4 - \frac{\nu}{4}\overline{w}_4 , \tag{8.18}$$

$$0 = \overline{w}_2' + \overline{W}_2' - \nu\,\overline{w}_4\,, \tag{8.19}$$

$$0 = \overline{m}_{x2} - \overline{M}_{r2} + \frac{\nu}{2}\,\overline{m}_{xy4}\,, \tag{8.20}$$

$$0 = -\frac{\nu}{2}\,\frac{p\,a}{2} - \frac{\nu}{2}\,(\bar{n}_x - \bar{n}_y)_0 + \bar{n}_{xy2} + \frac{p\,A}{4} + \overline{N}_{r\varphi 2} + \frac{\nu}{4}\,(\bar{n}_x - \bar{n}_y)_4\,, \tag{8.21}$$

$$0 = \bar{q}_{x2} - \frac{\nu}{2}\,\frac{p\,a}{2} + \frac{\nu}{2}\,\bar{n}_{x2} - \frac{\nu}{2}\,\bar{n}_{x0} + \frac{p\,A}{4} - \overline{N}_{r2} + \frac{\nu}{4}\,\bar{q}_{y4} - \frac{\nu}{4}\,\bar{n}_{x4}\,, \tag{8.22}$$

$$0 = \bar{n}_{x2} - \overline{Q}_{r2} + \frac{\nu}{2}\,p\,A - \frac{\nu}{2}\,\overline{N}_{r2} + \frac{\nu}{2}\,\overline{N}_{r0} + \frac{\nu}{2}\,\bar{n}_{xy4} + \frac{\nu}{4}\,\overline{N}_{r4}\,, \tag{8.23}$$

$$0 = \overline{w}_2 - \frac{\nu}{2}\,\frac{p\,A^2}{E\,H}\,(1-2\,\mu) - \overline{U}_2 + \frac{\nu}{2}\,\frac{p\,A^2}{E\,H}\left(1-\frac{\mu}{2}\right) + \frac{\nu}{2}\,\overline{W}_0 - \frac{\nu}{2}\,\overline{W}_2 + \frac{\nu}{4}\,\overline{W}_4\,, \tag{8.24}$$

für $n = 4$. ebenfalls acht Bedingungen

$$0 = -\frac{\nu}{4}\,\bar{u}_2 + \bar{v}_4 - \overline{V}_4^*\,, \tag{8.25}$$

$$0 = \bar{u}_4 - \frac{\nu}{4}\,\bar{v}_2 + \frac{\nu}{2}\,\overline{w}_4 - \frac{\nu}{4}\,\overline{w}_2 - \overline{W}_4\,, \tag{8.26}$$

$$0 = \overline{w}_4 - \overline{U}_4^* - \frac{\nu}{2}\,\overline{W}_4 + \frac{\nu}{4}\,\overline{W}_2\,, \tag{8.27}$$

$$0 = \overline{w}_4' + \frac{\nu}{2}\,\overline{w}_2 + \overline{W}_4'\,, \tag{8.28}$$

$$0 = \overline{m}_{x4} - \frac{\nu}{2}\,\overline{m}_{xy2} - \overline{M}_{r4}\,, \tag{8.29}$$

$$0 = -\frac{\nu}{4}\,(\bar{n}_x - \bar{n}_y)_2 + \bar{n}_{xy4} + \overline{N}_{r\varphi 4}\,, \tag{8.30}$$

$$0 = \bar{q}_{x4} - \frac{\nu}{4}\,\bar{q}_{y2} + \frac{\nu}{2}\,\bar{n}_{x4} - \frac{\nu}{4}\,\bar{n}_{x2} - \overline{N}_{r4}\,, \tag{8.31}$$

$$0 = \bar{n}_{x4} - \frac{\nu}{2}\,\bar{n}_{xy2} - \overline{Q}_{r4} - \frac{\nu}{16}\,p\,A - \frac{\nu}{2}\,\overline{N}_{r4} + \frac{\nu}{4}\,\overline{N}_{r2}\,. \tag{8.32}$$

Zur Befriedigung der Bedingungen (8.11) bis (8.32) stehen die 22 Konstanten

$$\left.\begin{array}{ll} a_{01},\ b_{01},\ a_{02} & \text{aus der Lösung } g_0 \\ a_{21},\ b_{21},\ a_{22},\ b_{22} & \text{aus der Lösung } g_2 \\ a_{41},\ b_{41},\ a_{42},\ b_{42} & \text{aus der Lösung } g_4 \end{array}\right\} \quad \text{für Rohr I,}$$

$$\left.\begin{array}{ll} B_{01},\ A_{02},\ B_{02} & \text{aus der Lösung } G_0 \\ A_{21},\ B_{21},\ A_{22},\ B_{22} & \text{aus der Lösung } G_2 \\ A_{41},\ B_{41},\ A_{42},\ B_{42} & \text{aus der Lösung } G_4 \end{array}\right\} \quad \text{für Rohr II}$$

zur Verfügung. a_{02} tritt nur in der Verschiebung u_0 auf und beschreibt eine formänderungs- und spannungsfreie Verschiebung des Rohres I parallel zu seiner Achse, die durch die radiale Aufweitung des Rohres II herbeigeführt wird.

9. Numerische Rechnungen. Hat eine Rohrabzweigung beispielsweise die in Abb. 20 dargestellten Größenverhältnisse mit den Parametern

$$\begin{aligned} \nu &= 0{,}2\,, && \text{d. h.} && A = 5\,a\,, \\ \vartheta^2 &= 9\,, && \text{d. h.} && a = 5{,}45\,h\,, \\ \Theta^2 &= 16\,, && \text{d. h.} && A = 9{,}69\,H\,, \end{aligned}$$

so kann wegen des kleinen Radienverhältnisses zur Bestimmung der Konstanten a_{01}, b_{01} usw. die in Abschnitt 8 entwickelte Form der Randbedingungen verwendet werden. In Tabelle 3 sind die mit obigen Parametern berechneten Konstanten als Vielfache der Größe $\tilde{p} = p\,a/E$ angegeben, und es sind die Konstanten der dreigliedrigen Ansätze $g_0 + g_2 + g_4$ und $G_0 + G_2 + G_4$ den ent-

sprechenden Konstanten der zweigliedrigen Ansätze $g_0 + g_2$ und $G_0 + G_2$ gegenübergestellt. Die letzteren lösen das Gleichungssystem (8.11) bis (8.24), nachdem man dort alle Glieder mit dem Index 4 gestrichen hat. Den Bedingungen (8.25) bis (8.32) sind die zweigliedrigen Ansätze nicht zu unterwerfen.

Die Zustandsgrößen im Übergangsgebiet zwischen den Rohren ($\varrho = 1$, $\xi - \xi_s = 0$) einschließlich der Spannungen stellen sich sämtlich in den Formen

$$k_0 + k_2 \cos 2\varphi + k_4 \cos 4\varphi$$

oder

$$k_2 \sin 2\varphi + k_4 \sin 4\varphi$$

dar, in der zweiten Form diejenigen, die einen von φ unabhängigen Summanden k_0 nicht enthalten. Die Koeffizienten k_0, k_2, k_4 entnimmt man Tabelle 4. Die Normalspannungen resultieren aus Membranspannungen und Biegespannungen:

$$\sigma_x = \frac{n_x}{h} \pm \frac{6\,m_x}{h^2}, \qquad \sigma_y = \frac{n_y}{h} \pm \frac{6\,m_y}{h^2},$$

$$\sigma_r = \frac{N_r}{H} \pm \frac{6\,M_r}{H^2}, \qquad \sigma_\varphi = \frac{N_\varphi}{H} \pm \frac{6\,M_\varphi}{H_2}.$$

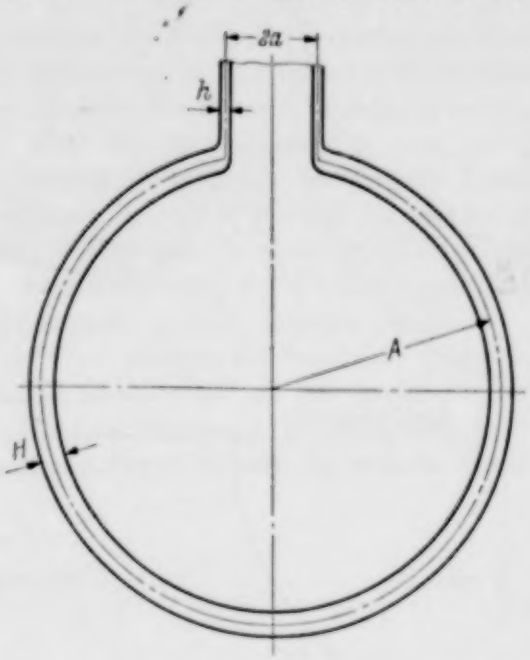


Abb. 20.

Tabelle 3

	3-gliedriger Ansatz	2-gliedriger Ansatz		3-gliedriger Ansatz	2-gliedriger Ansatz
$a_{01}/\tilde{p}$	10,6247	10,6239	$B_{01}/\tilde{p}$	5,3051	5,2944
$b_{01}/\tilde{p}$	13,9131	13,9111	$A_{02}/\tilde{p}$	78,8088	78,7900
$a_{02}/\tilde{p}$	62,1408	62,1342	$B_{02}/\tilde{p}$	11,8401	11,8397
$a_{21}/\tilde{p}$	7,2436	7,2478	$A_{21}/\tilde{p}$	−99,1044	−99,1404
$b_{21}/\tilde{p}$	4,6872	4,7031	$B_{21}/\tilde{p}$	13,3323	13,2506
$a_{22}/\tilde{p}$	−21,3114	−21,3127	$A_{22}/\tilde{p}$	−49,1368	−49,1528
$b_{22}/\tilde{p}$	− 0,00224	− 0,0304	$B_{22}/\tilde{p}$	3,3719	3,3289
$a_{41}/\tilde{p}$	0,13469		$A_{41}/\tilde{p}$	− 3,5144	
$b_{41}/\tilde{p}$	− 0,02985		$B_{41}/\tilde{p}$	− 2,7368	
$a_{42}/\tilde{p}$	0,08132		A_{42}/p	− 0,03945	
$b_{42}/\tilde{p}$	0,11537		$B_{42}/\tilde{p}$	0,04721	

Tabelle 4

	k_0	k_2	k_4		k_0	k_2	k_4
$u/\tilde{p}$	63,370	−2,204	0,039	U^*/p	8,379	−6,935	−0,055
$v/\tilde{p}$	0	12,400	−0,013	$V^*/\tilde{p}$	0	6,059	0,096
$w/\tilde{p}$	15,258	−14,07	0,216	$W/\tilde{p}$	66,216	−5,122	0,144
$w'/\tilde{p}$	9,865	0,397	−1,122	$W'/\tilde{p}$	−8,468	−0,437	−0,284
n_x/pa	0,500	−0,191	−0,014	N_r/pa	0,810	0,241	0,008
n_y/pa	2,948	1,908	0,026	N_φ/pa	7,980	4,603	0,180
n_{xy}/pa	0	−0,942	−0,013	$N_{r\varphi}/pa$	0	0,798	−0,090
q_x/pa	0,750	0,309	−0,002	Q_r/pa	0,337	−0,135	0,092
q_y/pa	0	−0,020	−0,004	Q_φ/pa	0c	−0,239	0,082
m_x/pa^2	−0,1417	−0,0122	0,0024	M_r/pa^2	−0,1419	−0,0119	0,0012
m_y/pa^2	−0,0425	0,0239	−0,0011	M_φ/pa^2	−0,1398	0,2265	−0,0298
m_{xy}/pa^2	0	−0,0005	0,0025	$M_{r\varphi}/pa^2$	0	−0,0825	0,0151
Spannungen in der inneren Oberfläche							
σ_x/p	−22,56	−3,21	0,354	σ_r/p	−1,63	0,20	0,043
σ_y/p	8,50	14,66	−0,056	σ_φ/p	12,30	14,02	−0,320
Spannungen in der äußeren Oberfläche							
σ_x/p	27,96	1,13	−0,506	σ_r/p	4,77	0,74	−0,011
σ_y/p	23,64	6,14	0,336	σ_φ/p	18,60	3,82	1,020

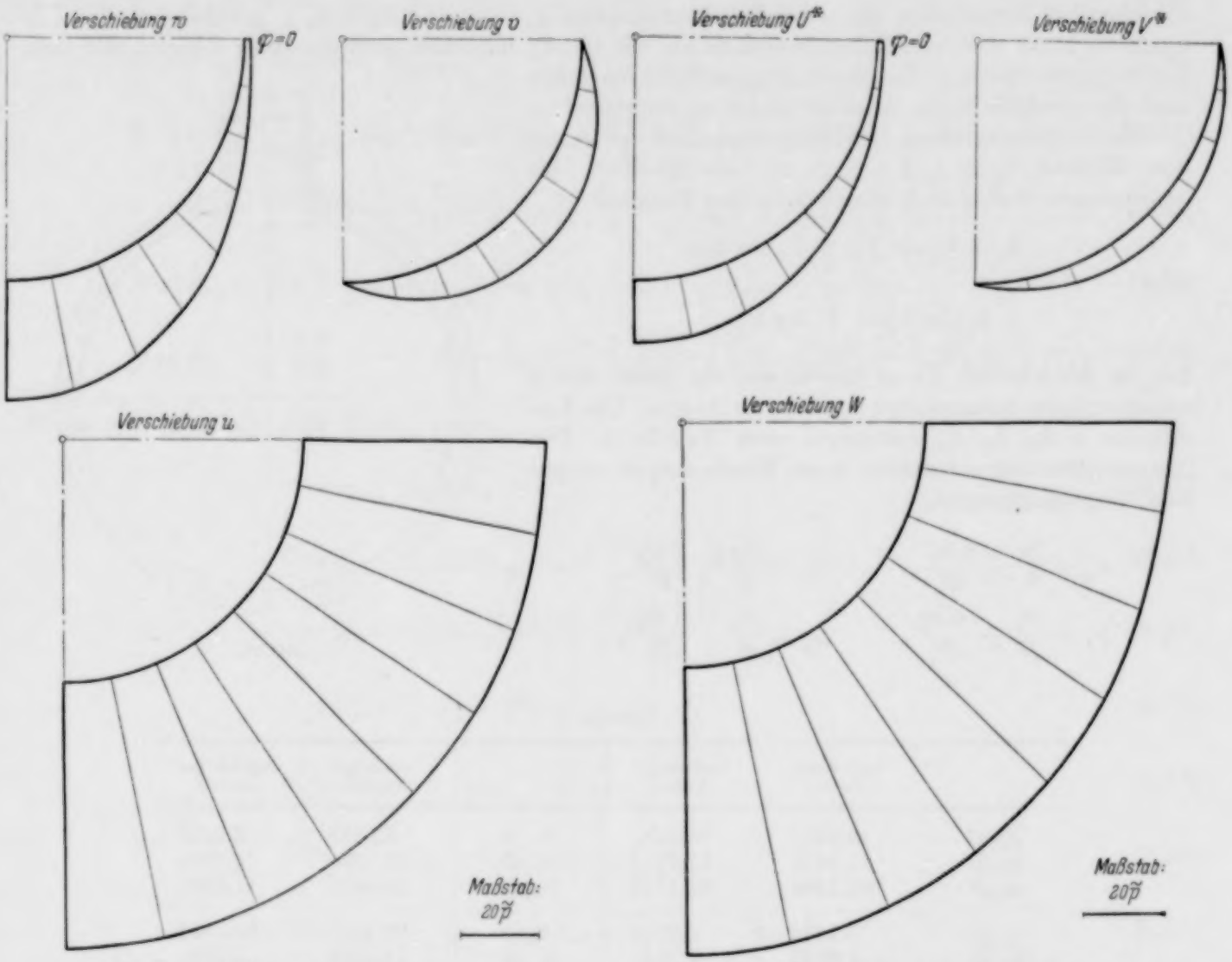


Abb. 21. Verschiebungen der Schnittkurvenpunkte in bezug auf das Koordinatensyxtem x, y, z der Rohres I.

Abb. 22. Verschiebungen der Schnittkurvenpunkte in bezug auf das Koordinatensystem r, φ, Z des Rohres II.

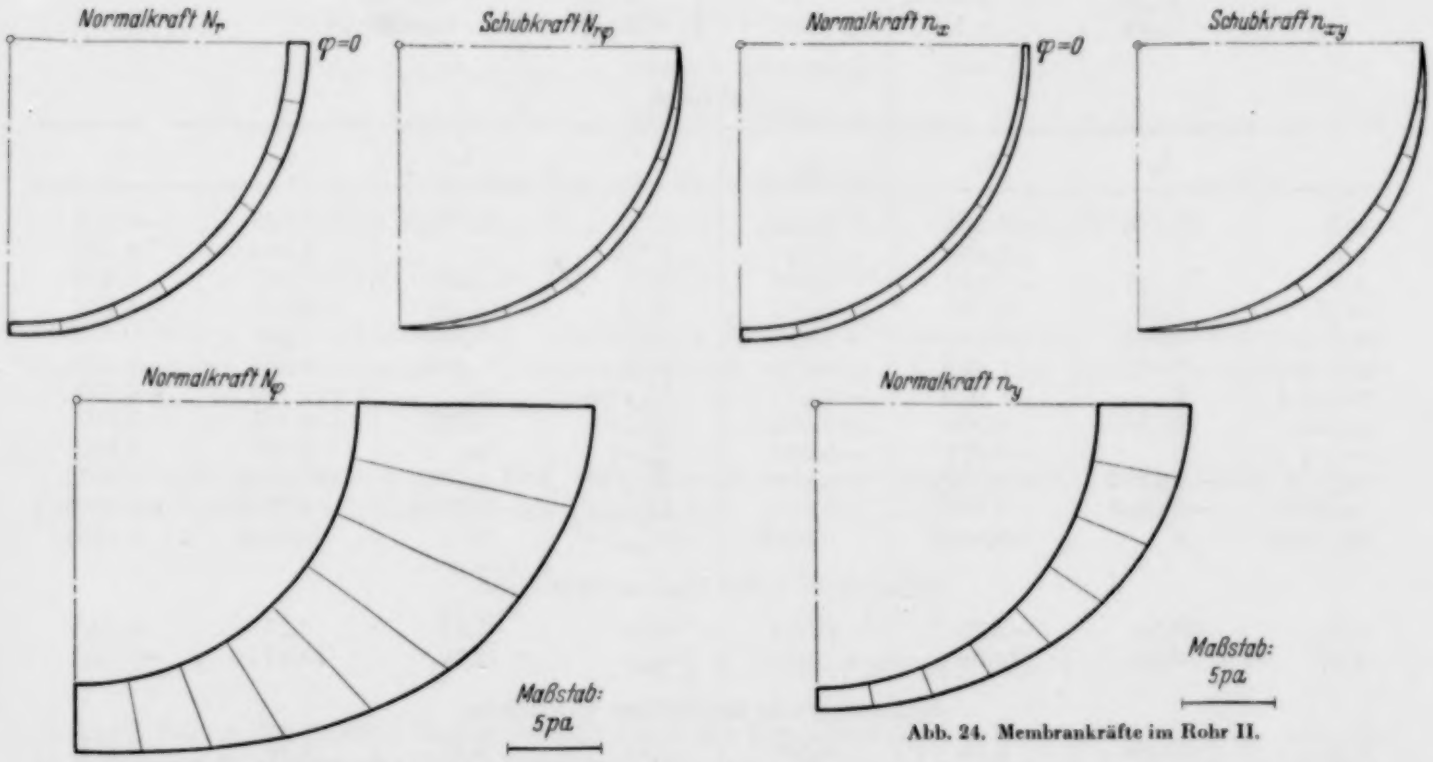


Abb. 23. Membrankräfte im Rohr I.

Abb. 24. Membrankräfte im Rohr II.

Das positive (negative) Vorzeichen gilt für die Spannungen in der inneren (äußeren) Oberfläche der Rohre. Der Verlauf der Zustandsgrößen längs der Schnittkurve ist in den Abb. 21 bis 28 dargestellt.

Die Materialanstrengung, die der einfachen Berechnung wegen als Differenz zwischen größter und kleinster Hauptspannung bestimmt wurde, erreicht ihr Maximum in der inneren Oberfläche des abzweigenden Rohres, in dem in der Längsebene liegenden Punkte des unteren Randes ($\xi = 1/\nu$, $\varphi = 0$). Dort ist $\sigma_x = -25{,}4\,p$, $\sigma_y = 23{,}1\,p$, $\sigma_z = -p$, also die Anstrengung $\sigma_v = \sigma_y - \sigma_x = 48{,}5\,p$. Der ungestörte Grundspannungszustand in der inneren Oberfläche des Rohres I mit $\widetilde{\sigma}_x = 2{,}73\,p$, $\widetilde{\sigma}_y = 5{,}45\,p$ und $\widetilde{\sigma}_z = -p$ bewirkt die Anstrengung $\widetilde{\sigma}_v = 6{,}45\,p$. Die Randstörung steigert also die Anstrengung auf das 7,5-fache; dieser Effekt beruht jeweils etwa zur Hälfte auf der Ovalisierung des Mündungsloches, die zu einer beträchtlichen Steigerung der Umfangsspannung σ_y führt, und auf der Randeinspannung, welche die Achsialspannung σ_x stark negativ macht.

Der Beitrag der Koeffizienten k_4 zu den Maximalwerten der Spannungen ist durchweg vernachlässigbar klein. Da ferner die k_0 und k_2 praktisch unabhängig davon sind, ob mit dreigliedrigen oder zweigliedrigen Ansätzen gerechnet wird — siehe die Übereinstimmung der entsprechenden Konstanten in Tabelle 3 — können vorbehaltlich der Bestätigung durch weitere numerische Rechnungen die zweigliedrigen Ansätze $g_0 + g_2$ und $G_0 + G_2$ bei hinreichend kleinem Radienverhältnis als befriedigende Lösungen betrachtet werden. Der hierbei zu beachtende obere Grenzwert des Radienverhältnisses könnte durch Vergleich mit Lösungen aus der erwähnten Störungsrechnung bestimmt werden. Der Einsatz von Rechenautomaten erscheint hierzu unerläßlich.

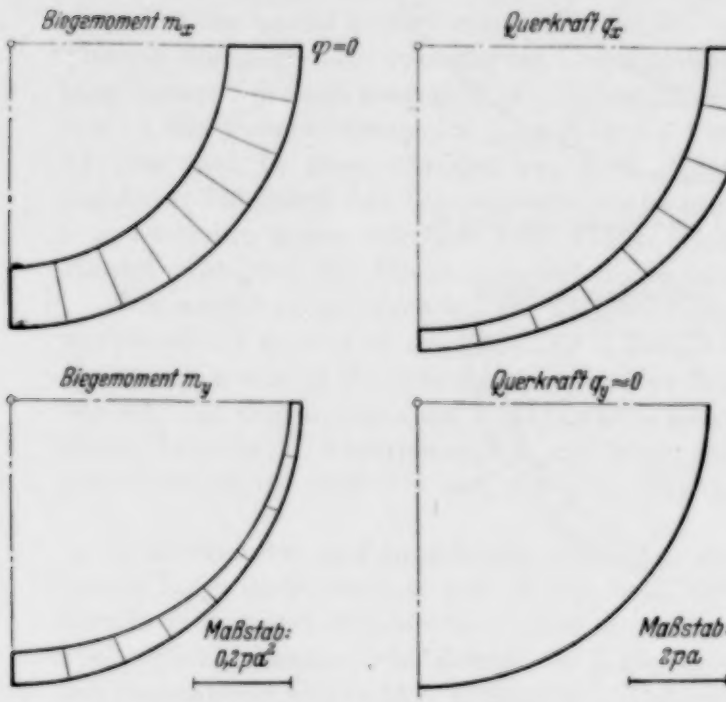


Abb. 25. Biegemoment und Querkräfte im Rohr I.

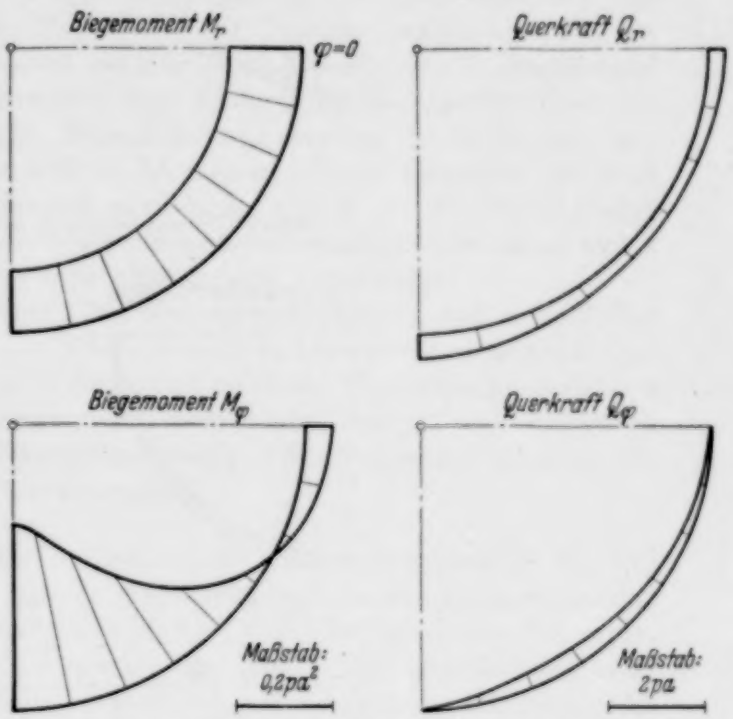


Abb. 26. Biegemoment und Querkräfte im Riohr II.

10. Zusammenfassung. Der Spannungszustand im Übergangsgebiet einer durch Innendruck belasteten, rechtwinkligen Rohrabzweigung — eines im Maschinen- und Apparatebau häufig verwendeten Konstruktionselementes — unterliegt verhältnismäßig komplizierten Randbedingungen, die mit den klassischen Hilfsmitteln der Biegetheorie der Kreiszylinderschale im allgemeinen nur in einzelnen Punkten auf der Schnittkurve der beiden Rohrmittelflächen erfüllt werden können.

Unterschreitet das Radienverhältnis a/A (a Halbmesser des abzweigenden, A Halbmesser des durchlaufenden Rohres) den Wert 0,5, so lassen sich die Randbedingungen soweit vereinfachen, daß ihre Erfüllung in allen Punkten der Schnittkurve durch eine geschlossene Lösung des Randwertproblems möglich wird. Dies gelingt hauptsächlich durch Verwendung eines polaren Koordinatensystems auf der Mittelfläche des durchlaufenden Rohres und einer vereinfachten Schalenbiegetheorie von *Green* und *Zerna*. Die Lösung hat zunächst die Gestalt unendlicher Reihen; man kann sie jedoch

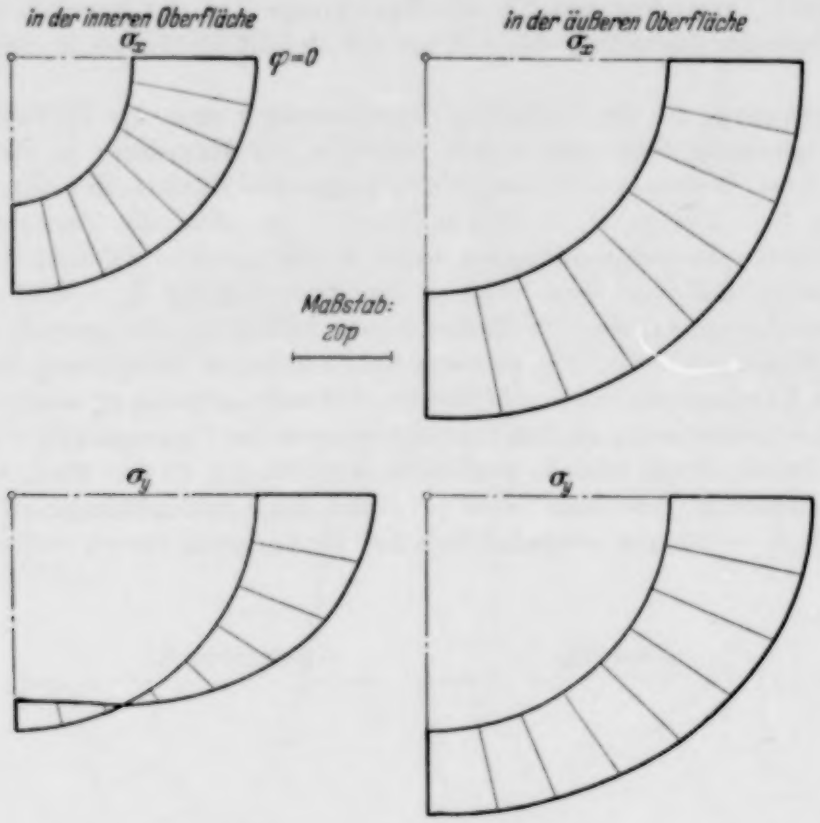


Abb. 27. Normalspannungen im Rohr I am Übergang zum Rohr II.

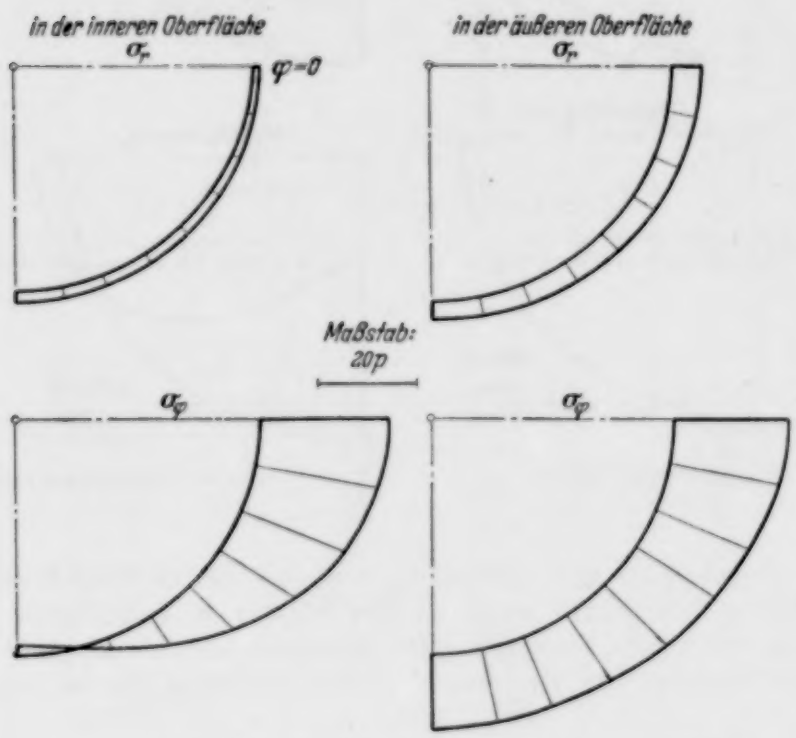


Abb. 28: Normalspannungen im Rohr II am Übergang zum Rohr I.

bei kleinem Radienverhältnis auf die ersten zwei oder drei Glieder der Reihen beschränken. Der Kern der numerischen Rechnungen besteht dann in der Bestimmung von 14 oder 22 Konstanten, mit denen schließlich sämtliche Verschiebungen, inneren Kräfte und Momente und Spannungen im Übergangsgebiet der Rohrabzweigung berechnet werden können. Ein spezielles Zahlenbeispiel ergibt eine Steigerung der Materialanstrengung im Übergangsgebiet im Vergleich zur Anstrengung im ungestörten Grundspannungszustand um den Faktor 7,5.

(Eingegangen am 16. August 1960.)

Anschrift des Verfassers: Privatdozent Dr.-Ing. *Willi Reidelbach*, Sindelfingen/Wttbg., Eyachstr. 10.

Die Relation zwischen Temperatur und Geschwindigkeit in der Theorie kompressibler turbulenter Grenzschichten

Von W. Szablewski

1. Einleitung. Die Relation zwischen Temperatur und Geschwindigkeit spielt bekanntlich eine fundamentale Rolle in den Berechnungsverfahren kompressibler turbulenter Grenzschichten. Die bisher bekannt gewordenen Formulierungen dieser Relation, die die Temperaturverteilung als quadratische Funktion der Geschwindigkeitsverteilung ergeben, unterliegen jedoch gewissen Einschränkungen und Einwendungen. *E. R. van Driest*[1] und jüngst *J. Rotta*[2] lassen in ihrer Herleitung der Relation den Einfluß der Dichteschwankungen auf den turbulenten Austausch unberücksichtigt. Dichteschwankungen treten in kompressiblen turbulenten Grenzschichten notwendigerweise wegen der in diesen vorhandenen Dichteverteilungen auf, wie anschaulich sofort erkennbar ist, wenn man sich den Prozeß der turbulenten Vermischung als durch Verschieben ganzer Flüssigkeitsteilchen von einer Schicht in die andere erzeugt vorstellt. Auf die Bedeutung der Dichteschwankungen für die Theorie kompressibler turbulenter Grenzschichten haben bereits *T. Y. Li*[3] und *H. T. Nagamutsu*[3] hingewiesen[4], jedoch tragen *T. Y. Li* und *H. T. Nagamutsu* dem Einfluß der Dichteschwankungen nur in der Formulierung des Impulssatzes Rechnung. Berücksichtigt werden die Dichteschwankungen auch in einem Artikel von *G. B. Schubauer* und *C. M. Tchen*[5]. Doch erscheint die dort gegebene Ableitung der Temperatur-Geschwindigkeitsrelation nicht zwingend. In der vorliegenden Untersuchung geben wir eine neue Formulierung der Temperatur-Geschwindigkeitsrelation unter Berücksichtigung der Dichteschwankungen und unter sehr allgemeinen Annahmen.

Wir machen im Folgenden die übliche Voraussetzung der Grenzschichttheorie, daß sowohl der molekulare und der turbulente Austausch wie auch ihre Gradienten innerhalb der Strömung nur in Richtung normal zur Wand von Bedeutung sind. Weiterhin beschränken wir uns auf den wandnahen vollturbulenten Bereich der Grenzschicht, der gekennzeichnet ist durch konstante Schubspannung und konstanten Energieaustausch. Die Strömung wird als im zeitlichen Mittel stationär und als ebene Strömung vorausgesetzt.

2. Kontinuität und Impulssatz. Es bedeuten im Folgenden: x bzw. y bzw. z cartesische Koordinaten längs bzw. normal zur Wand bzw. normal zur (x, y)-Ebene; u, v, w die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten; p den statischen Druck, ϱ die Dichte, μ den Zähigkeitskoeffizienten, $\nu = \mu/\varrho$ die kinematische Zähigkeit, T die absolute Temperatur, c_p bzw. c_v die spezifische Wärme bei konstantem Druck bzw. konstantem Volumen, λ den Wärmeleitungskoeffizienten. Überstreichen bedeutet Mittelwertbildung.

1. Die Kontinuitätsgleichung lautet dann

$$\frac{\partial \overline{\varrho u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\varrho v}}{\partial y} = 0 \,. \tag{1}$$

Spalten wir nach *O. Reynolds* die Momentanwerte der Strömung auf in zeitliche Mittelwerte und momentane Schwankungen:

$$u = \bar{u} + u' \,, \quad \varrho = \bar{\varrho} + \varrho' \,, \tag{2}$$

so folgt

$$\frac{\partial \overline{\varrho u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\varrho v}}{\partial y} = \frac{\partial(\overline{-\varrho' v'})}{\partial y} \,. \tag{3}$$

2. Für den Impulssatz haben wir

$$\frac{\partial \overline{\varrho u^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\varrho u v}}{\partial y} = -\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{\mu \frac{\partial u}{\partial y}}\right) . \tag{4}$$

---

[1] *E. R. van Driest*, Journ. Aeron. Sci. 18 (1951), S. 145.
[2] *J. Rotta*, Z. Flugwiss. 7 (1959), S. 204.
[3] *T. Y. Li* and *H. T. Nagamutsu*, Journ. Aeron. Sci. 18 (1951), S. 696.
[4] Vgl. ferner *W. Szablewski*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 67.
[5] *G. B. Schubauer* and *C. M. Tchen*, High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, Bd. V (1959).

Mit

$$\overline{\varrho\, u\, v} = \bar{v}\,(\bar{\varrho}\,\bar{u} + \overline{\varrho'\, u'}) + \bar{\varrho}\,\overline{u'\, v'} + \bar{u}\,\overline{\varrho'\, v'} \approx \bar{\varrho}\,\bar{u}\,\bar{v} + \bar{\varrho}\,\overline{u'\, v'} + \bar{u}\,\overline{\varrho'\, v'} \tag{5}$$[1]

folgt

$$\frac{\partial \bar{\varrho}\,\bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varrho}\,\bar{u}\,\bar{v}}{\partial y} = -\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{\left(\mu\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\bar{\varrho}\,(-\overline{u'\, v'}) + \bar{u}\,(-\overline{\varrho'\, v'})\right]. \tag{6}$$

3. Energiesatz. Der Energiesatz lautet bekanntlich

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left[\overline{\left(c_p\, T + \frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)\varrho\, \mathfrak{v}}\right] &= \operatorname{div}\,(\overline{\lambda\, \operatorname{grad}\, T}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}\left[\overline{\mu\, u\left(2\,\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\,\mathfrak{v}\right)} + \overline{\mu\, v\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)} + \overline{\mu\, w\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)}\right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\overline{\mu\, u\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)} + \overline{\mu\, v\left(2\,\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\,\mathfrak{v}\right)} + \overline{\mu\, w\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)}\right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\overline{\mu\, u\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)} + \overline{\mu\, v\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)} + \overline{\mu\, w\left(2\,\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\,\mathfrak{v}\right)}\right];\end{aligned} \tag{7}$$

c_p wird dabei als Konstante angesehen.

Die Mittelwertbildung ergibt dann für den turbulenten Austausch normal zur Wand

$$\overline{c_p\, T\, \varrho\, v} \approx c_p\,[\bar{\varrho}\,\bar{T}\,\bar{v} + \bar{\varrho}\,\overline{T'\, v'} + \overline{T}\,\overline{\varrho'\, v'}] \tag{8}$$

und für

$$\overline{\frac{(u^2+v^2+w^2)}{2}\,\varrho\, v} \quad \text{zunächst} \quad \approx \frac{1}{2}\,\overline{u^2\varrho\, v},$$

wenn wir

$$\frac{\overline{v^2} + \overline{w^2}}{2} \ll \frac{\overline{u^2}}{2}$$

für die Grenzschichtströmung annehmen. Mit

$$u^2 = \bar{u}^2 + 2\,\bar{u}\,u' + u'^2, \qquad \varrho\, v = \bar{\varrho}\,\bar{v} + \bar{\varrho}\,v' + \bar{v}\,\varrho' + \varrho'\, v'$$

folgt weiter

$$\overline{u^2\,\varrho\, v} \approx [\bar{\varrho}\,\bar{v}(\bar{u}^2 + \overline{u'^2}) + 2\,\bar{u}\,\bar{v}\,\overline{\varrho'\, u'}] + 2\,\bar{\varrho}\,\bar{u}\,\overline{u'\, v'} + \bar{u}^2\,\overline{\varrho'\, v'}$$

und bei Vernachlässigung von Gliedern kleinerer Größßenordnung[2]

$$\overline{u^2\,\varrho\, v} \approx \bar{\varrho}\,\bar{u}^2\,\bar{v} + 2\,\bar{\varrho}\,\bar{u}\,\overline{u'\, v'} + \bar{u}^2\,\overline{\varrho'\, v'}. \tag{9}$$

Sehen wir im Folgenden, wie eingangs erwähnt, die Gradienten des Austausches nur in Richtung normal zur Wand als wesentlich an, so erhalten wir aus (7) mit (8) und (9)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(c_p\,\overline{T} + \frac{\bar{u}^2+\bar{v}^2}{2}\right)\bar{\varrho}\,\bar{u}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(c_p\,\overline{T} + \frac{\bar{u}^2+\bar{v}^2}{2}\right)\bar{\varrho}\,\bar{v}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\overline{\left(\lambda\,\frac{\partial T}{\partial y}\right)} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\overline{\mu\, u\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)} + \overline{\mu\, v\left(2\,\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\,\mathfrak{v}\right)} + \overline{\mu\, w\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)}\right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y}\left[\bar{\varrho}\,(-c_p\,\overline{T'\, v'}) + c_p\,\overline{T}\,(-\overline{\varrho'\, v'}) + \bar{\varrho}\,\bar{u}\,(-\overline{u'\, v'}) + \frac{\bar{u}^2}{2}\,(-\overline{\varrho'\, v'})\right].\end{aligned} \tag{10}$$

Dabei haben wir in die Konvektionsglieder die an und für sich vernachlässigbaren Mittelwerte $\bar{v}^2$ wieder aufgenommen.

Wir führen jetzt mit der Wandtemperatur T_0 die Temperaturdifferenz $\vartheta = T - T_0$ ein (der Index 0 kennzeichnet auch weiterhin die Wand). Wir können dann bei Benutzung der Kontinuitätsgleichung (3) in der Formel (10) für den Energiesatz die Variable T durch ϑ ersetzen.

---

[1] Der Herleitung von Formel (5) und (9) liegt zugrunde, daß wohl $\overline{|u'|}$ bzw. $\overline{|\varrho'|}$ als klein gegen $\bar{u}$ bzw. $\bar{\varrho}$ anzusehen sind, jedoch nicht $\overline{|v'|}$ als klein gegen $\bar{v}$ angenommen werden kann; vgl. *W. Szablewski*, a. a. O.

[2] Zur Begründung siehe Fußnote 1.

Nunmehr schränken wir unsere Betrachtung auf den wandnahen Bereich konstanter Schubspannung und konstanten Energieaustausches (durch Moleküle und Turbulenzelemente) ein. Aus der Impulsgleichung (6) erhalten wir dann durch Integration

$$\tau_0 = \overline{\mu \frac{\partial u}{\partial y}} + \bar{\varrho}\,\overline{(-u'\,v')} + \bar{u}\,\overline{(-\varrho'\,v')} \tag{11}$$

und aus dem Energiesatz (10)

$$\begin{aligned}\lambda_0\left(\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y}\right)_0 = {} & \overline{\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y}} + \bar{\varrho}\,\overline{(-c_p\,\vartheta'\,v')} + c_p\,\bar{\vartheta}\,\overline{(-\varrho'\,v')} \\ & + \overline{\mu\,u\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)} + \overline{\mu\,v\left(2\,\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v}\right)} + \overline{\mu\,w\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)} \\ & + \bar{\varrho}\,\bar{u}\,\overline{(-u'\,v')} + \frac{\bar{u}^2}{2}\,\overline{(-\varrho'\,v')}\,.\end{aligned} \tag{12}$$

Die Glieder des molekularen Austausches in (12) lassen sich nach *G. B. Schubauer* und *C. M. Tchen*[1] auch auf die Form bringen

$$\overline{\mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)} + \overline{\mu\left(u\,\frac{\partial v}{\partial x} - v\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)} + \overline{\mu\left(w\,\frac{\partial v}{\partial z} - v\,\frac{\partial w}{\partial z}\right)} + \overline{\frac{1}{3}\mu\,v\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}\,.$$

Das dritte Glied hier ist aus Gründen der Symmetrie (beide Richtungen der z-Achse sind vom Standpunkt der Strömung nicht zu unterscheiden) gleich Null zu setzen. Da wir nur den molekularen Austausch normal zur Wand als wesentlich ansehen, können wir auch $\overline{\mu\,u\,\frac{\partial v}{\partial x}}$ und $\overline{\mu\,v\,\frac{\partial u}{\partial x}}$ vernachlässigen. Sehen wir noch das Glied $^1/_3\,v^2$ als klein gegenüber $u^2+v^2+w^2$ an, so erhalten wir schließlich für den Energiesatz

$$\begin{aligned}\lambda_0\left(\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y}\right)_0 = {} & \overline{\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y}} + \bar{\varrho}\,\overline{(-c_p\,\vartheta'\,v')} + c_p\,\bar{\vartheta}\,\overline{(-\varrho'\,v')} \\ & + \overline{\mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)} + \bar{\varrho}\,\bar{u}\,\overline{(-u'\,v')} + \frac{\bar{u}^2}{2}\,\overline{(-\varrho'\,v')};\end{aligned} \tag{13}$$

diese Formel entspricht der Ausgangsform

$$\overline{\left(c_p\,T + \frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)\varrho\,v} = \overline{\lambda \frac{\partial T}{\partial y}} - \lambda_0\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right)_0 + \overline{\mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)}, \tag{14}$$

die in übersichtlicher Weise turbulenten und molekularen Austausch gegenüberstellt. Gleichung (14) haben *G. B. Schubauer* und *C. M. Tchen*[2] angegeben.

Wir betrachten weiterhin nur noch den vollturbulenten Teil des wandnahen Bereiches, in dem also der molekulare gegenüber dem turbulenten Austausch vernachlässigbar ist. Aus (13) folgt dann unter Beachtung von (11)

$$\lambda_0\left(\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y}\right)_0 = \bar{\varrho}\,c_p\,\overline{(-\vartheta'\,v')} + c_p\,\bar{\vartheta}\,\overline{(-\varrho'\,v')} + \underline{\tau_0\,\bar{u} - \frac{\bar{u}^2}{2}\,\overline{(-\varrho'\,v')}}\,. \tag{15}$$

Die unterstrichenen Glieder ergeben zusammen die Dissipation der Strömung. Das bemerkenswerte Ergebnis ist, daß bei Berücksichtigung der Dichteschwankungen im Ausdruck für die Dissipation der Strömung zu dem Glied $\tau_0\,\bar{u}$, das mit Einschluß der Dissipation der Hauptbewegung die der Hauptbewegung entzogene Energie zur Erhaltung der Nebenbewegung darstellt, das Glied $(\bar{a}^2/2)\,\overline{\varrho'\,v'}$ hinzukommt, das als Diffusion kinetischer Energie mittels des turbulenten Massentransports aufzufassen ist (vgl. hierzu auch Abschn. 4).

4. Die Temperatur-Geschwindigkeitsrelation kompressibler turbulenter Grenzschichten. Wir legen im Folgenden die sehr allgemeinen *Boussinesq*schen Ansätze zugrunde

$$-\overline{u'\,v'} = \varepsilon(x,y)\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \tag{16a}$$

$$-\overline{\vartheta'\,v'} = E\,\varepsilon(x,y)\,\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y}, \tag{16b}$$

$$-\overline{\varrho'\,v'} = E\,\varepsilon(x,y)\,\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y}. \tag{16c}$$[3]

Der Austauschkoeffizient $\varepsilon(x,y)$ hat dabei die Dimension einer kinematischen Zähigkeit.

[1] *G. B. Schubauer* und *C. M. Tchen*, a. a. O.
[2] *G. B. Schubauer* und *C. M. Tchen*, a. a. O.
[3] Vgl. hierzu *W. Szablewski*, a. a. O.

Während (16a) und (16b) in der Theorie turbulenter Grenzschichten geläufige Ansätze sind, ist zur Erläuterung des Ansatzes (16c) zu sagen: Die obigen Gleichungen entsprechen in Analogie zur kinetischen Gastheorie der Vorstellung, daß Flüssigkeitseigenschaften von einer Schicht in die andere transportiert werden. Gleichung (16a) spricht das für die Geschwindigkeit, (16b) für die Temperatur aus. Da nun in einer kompressiblen Grenzschichtströmung verschiedene Schichten auch verschiedene Dichten aufweisen, ist ein Transport der Dichte von einer Schicht in die andere anzunehmen. Gleichung (16c) ist dann nur der (16a), (16b) entsprechende Ansatz.

Der Faktor E ist ein Maß dafür, daß beim turbulenten Transport für die substantiellen Eigenschaften bekanntlich ein anderer Austauschkoeffizient in Erscheinung tritt als für die während des Transports Druckschwankungen ausgesetzte Geschwindigkeit.

Wir erhalten dann nach (11) und (15):

Impuls

$$\tau_0 = \varepsilon\left(\bar{\varrho}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + E\,\bar{u}\,\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y}\right), \tag{17}$$

Energie

$$\lambda_0\left(\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y}\right)_0 = E\,\varepsilon\,c_p\,\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y}\,\bar{\vartheta} + \tau_0\,\bar{u} - E\,\varepsilon\,\frac{\bar{u}^2}{2}\,\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y}. \tag{18}$$

Mittels der Gasgleichung für konstanten Druck (gemäß der Annahme der Grenzschichttheorie)

$$\bar{\varrho}\,\bar{T} \approx \varrho_0\,T_0 \tag{19}$$

können wir in den Gleichungen $\bar{\varrho}$ durch $\bar{T} = T_0 + \bar{\vartheta}$ ersetzen.

Führen wir noch mit der Schubspannungsgeschwindigkeit $v_* = \sqrt{\tau_0/\varrho_0}$ dimensionslose Koordinaten

$$\eta = \frac{v_*\,y}{\nu_0}, \qquad \omega = \frac{\bar{u}}{v_*} \quad \text{und} \quad \chi = \frac{\bar{\vartheta}}{T_0}$$

und die Parameter

$$\Lambda_0 = \frac{\lambda_0\left(\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y}\right)_0}{c_p\,\varrho_0\,T_0}\,\frac{1}{v_*}, \qquad M_0 = \frac{v_*}{\sqrt{(\gamma-1)\,c_p\,T_0}} \qquad (\gamma = c_p/c_v) \tag{20}[1]$$

ein, so kommt:

Impuls

$$1 = \frac{\varepsilon}{\nu_0}\left[\frac{1}{(1+\chi)}\,\frac{\partial \omega}{\partial \eta} - E\,\omega\,\frac{\partial \chi/\partial \eta}{(1+\chi)^2}\right], \tag{21}$$

Energie

$$\Lambda_0 - (\gamma-1)\,M_0^2\,\omega = E\,\frac{\varepsilon}{\nu_0}\,\frac{\partial \chi/\partial \eta}{(1+\chi)^2}\left[1 + (\gamma-1)\,M_0^2\,\frac{\omega^2}{2}\right]. \tag{22}$$

Aus diesen Gleichungen gewinnt man die Temperatur-Geschwindigkeitsrelation in folgender Weise: Nach (21) ist

$$\frac{\varepsilon}{\nu_0}\,\frac{\partial \omega/\partial \eta}{1+\chi} = 1 + E\,\frac{\varepsilon}{\nu_0}\,\omega\,\frac{\partial \chi/\partial \eta}{(1+\chi)^2}$$

oder unter Beachtung von (22)

$$\frac{\varepsilon}{\nu_0}\,\frac{\partial \omega/\partial \eta}{1+\chi} = \frac{1 + \Lambda_0\,\omega - (\gamma-1)\,M_0^2\,\omega^2/2}{1 + (\gamma-1)\,M_0^2\,\omega^2/2}. \tag{23}$$

Mit der Form (22)

$$E\,\frac{\varepsilon}{\nu_0}\,\frac{\partial \chi/\partial \eta}{(1+\chi)^2} = \frac{\Lambda_0 - (\gamma-1)\,M_0^2\,\omega}{1 + (\gamma-1)\,M_0^2\,\omega^2/2}$$

erhält man durch Division der beiden letzten Gleichungen

$$\frac{1}{E}\,\frac{\partial \omega/\partial \eta}{\partial \chi/\partial \eta}\,(1+\chi) = \frac{1 + \Lambda_0\,\omega - (\gamma-1)\,M_0^2\,\omega^2/2}{\Lambda_0 - (\gamma-1)\,M_0^2\,\omega}. \tag{24}$$

---

[1] Der Parameter M_0, der von *R. G. Deissler* NACA TN 2138 (1950) eingeführt wurde, hat den Bau einer mit der Schubspannungsgeschwindigkeit v_* gebildeten Machzahl.

Integration ergibt dann die neue Relation

$$\left.\begin{aligned}(1+\chi)^E &= C\left[1+\Lambda_0\,\omega-(\gamma-1)\,M_0^2\,\frac{\omega^2}{2}\right]\\ \text{oder}\qquad \left(\frac{\bar T}{T_0}\right)^E &= C\left[1+\Lambda_0\frac{\bar u}{v_*}-(\gamma-1)\,M_0^2\,\frac{1}{2}\left(\frac{\bar u}{v_*}\right)^2\right].\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Die Integrationskonstante C, die als abhängig von den Parametern Λ_0 und M_0 anzusehen ist, ist im Rahmen der vorliegenden Untersuchung nicht weiter bestimmbar. Ihre Ermittlung würde die Integration der durch den molekularen Austausch vervollständigten Differentialgleichungen von der Wand aus unter Berücksichtigung der Randbedingung erfordern. Dabei wäre dann noch eine Hypothese über den turbulenten Austausch, d. h. über die funktionale Abhängigkeit des Austauschkoeffizienten ε von den mittleren Zustandsgrößen des Feldes, zu treffen.

Wir wollen noch anmerken, daß man bei Vernachlässigung der Dichteschwankungen die Gleichungen:

Impuls

$$1=\frac{\varepsilon}{v_0}\,\frac{\partial\omega/\partial\eta}{1+\chi}, \tag{a}$$

Energie

$$\Lambda_0-(\gamma-1)\,M_0^2\,\omega=E\,\frac{\varepsilon}{v_0}\,\frac{\partial\chi/\partial\eta}{1+\chi} \tag{b}$$

erhält, aus denen die Relation

$$E\,\chi=\text{const}+\Lambda_0\,\omega-(\gamma-1)\,M_0^2\,\frac{\omega^2}{2} \tag{c}$$

folgt[1]. Die Integrationskonstante tritt also hier additiv auf, während sie in (25) als multiplikativer Faktor erscheint.

Die Relation (25) enthält eine bemerkenswerte Folgerung. Für den Grenzwert $1+\chi\to 0$, der mit gegen Null strebender Tangente bei nicht vernachlässigbarer Dissipation ($M_0\neq 0$) zu erwarten ist (vgl. Abschn. 6), folgt aus (25) als entsprechender Grenzwert der Geschwindigkeit mit gegen Null strebender Tangente der aus der Gleichung

$$1+\Lambda_0\,\omega-(\gamma-1)\,M_0^2\,\frac{\omega^2}{2}=0$$

sich ergebende Wert

$$\omega_*=\frac{1}{(\gamma-1)\,M_0^2}\left[\Lambda_0+\sqrt{\Lambda_0^2+2(\gamma-1)\,M_0^2}\right]. \tag{26}$$

Diese Formel gibt bereits einen ersten Überblick über die Staffelung der Geschwindigkeitsprofile nach den Parameterwerten Λ_0 und M_0.

5. Vergleich mit Messungen. Zum Vergleich ziehen wir eine neuere amerikanische Messung[2] heran. Die Meßpunkte haben wir dabei, da uns die Originalarbeit nicht zur Verfügung stand, einer Arbeit von *J. Rotta*[3] entnommen.

Der von uns erhaltenen Relation (25) kann man auch die Form geben

$$\lg(1+\chi)=\frac{1}{E}\lg\left[1+\Lambda_0\,\omega-(\gamma-1)\,M_0^2\,\frac{\omega^2}{2}\right]+\frac{1}{E}\lg C. \tag{27}$$

In der entsprechenden Auftragung der einzelnen Meßreihen (vgl. Abb. 1) müßten also die im vollturbulenten wandnahen Bereich gelegenen Meßpunkte auf parallelen Geraden gelegen sein. Aus der Neigung dieser Geraden müßte ferner das Übertragungsverhältnis E (vgl. Abschn. 4) ablesbar sein! Die in Abb. 1 wiedergegebenen vier Meßreihen verschiedener *Mach*zahlen M_∞ (M_∞ *Mach*zahl der Strömung außerhalb der Grenzschicht) darf man wohl als eine Bestätigung der Relation (27) ansehen. Aus der Auftragung ergibt sich weiter, daß das Übertragungsverhältnis nur wenig von $E=1$ verschieden ist; der von *H. Ludwieg*[4] erhaltene Wert $E=1{,}1$ scheint sich der Messung am besten anzupassen.

---

[1] Vgl. *J. Rotta*, a. a. O.

[2] *R. K. Lobb, E. M. Winkler, J. Persh*, Experimental investigation of turbulent boundary layers in hypersonic flow. U. S. Naval Ordnance Laboratory, NAVORD Rep. 3880 (1955).

[3] *J. Rotta*, a. a. O.

[4] *H. Ludwieg*, Z. Flugw. 4 (1956), S. 73.

In der graphischen Darstellung der Abb. 2 wird die Relation (25) durch ein Strahlenbüschel mit dem Nullpunkt als Ursprung wiedergegeben. Auch diese Darstellung, der wir $E = 1{,}1$ zugrundelegten, scheint unsere Relation zu bestätigen.

Schließlich wollen wir noch demonstrieren, daß die alte Relation [Gl. (c), Abschn. 4]

$$1 + \chi = \frac{1}{E}\left[1 + \Lambda_0\,\omega - (\gamma - 1)\,M_0^2\,\frac{\omega^2}{2}\right] + \text{konst.}$$

die Verhältnisse weniger gut wiedergibt. In der entsprechenden Auftragung der Abb. 3 müßten nach der obigen Relation die Meßreihen durch parallele Geraden der Neigung $1/E$ wiedergegeben werden.

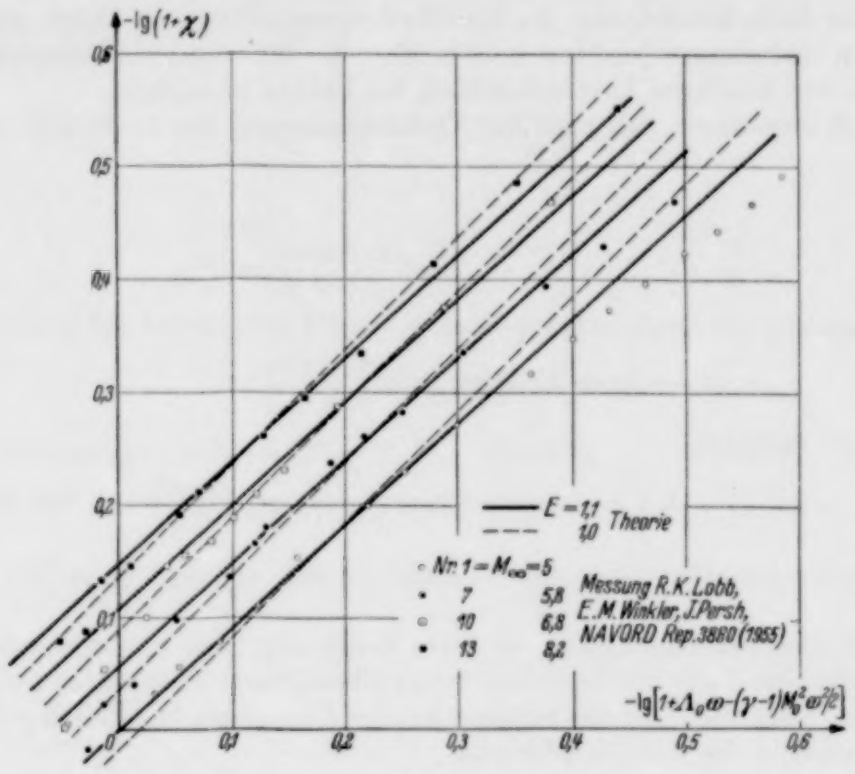


Abb. 1.

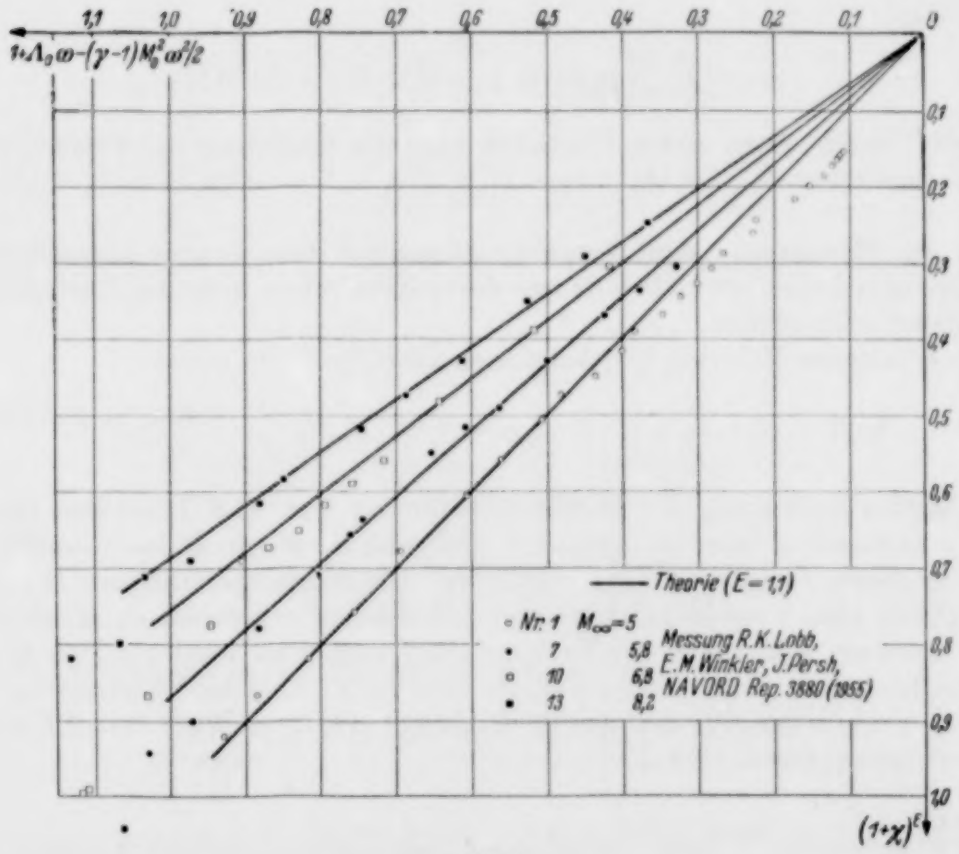


Abb. 2.

Legen wir wieder $E = 1{,}1$ zugrunde, so ist aus Abb. 3 deutlich ersichtlich, daß dies nicht der Fall ist. Erwartungsgemäß treten dabei die Abweichungen vom theoretischen Verlauf bzw. der Einfluß der Dichteschwankungen um so stärker in Erscheinung, je größer M_∞ ist. Wir merken noch an, daß Abb. 2 und Abb. 3 äquivalente Darstellungen der neuen und der alten Relation sind.

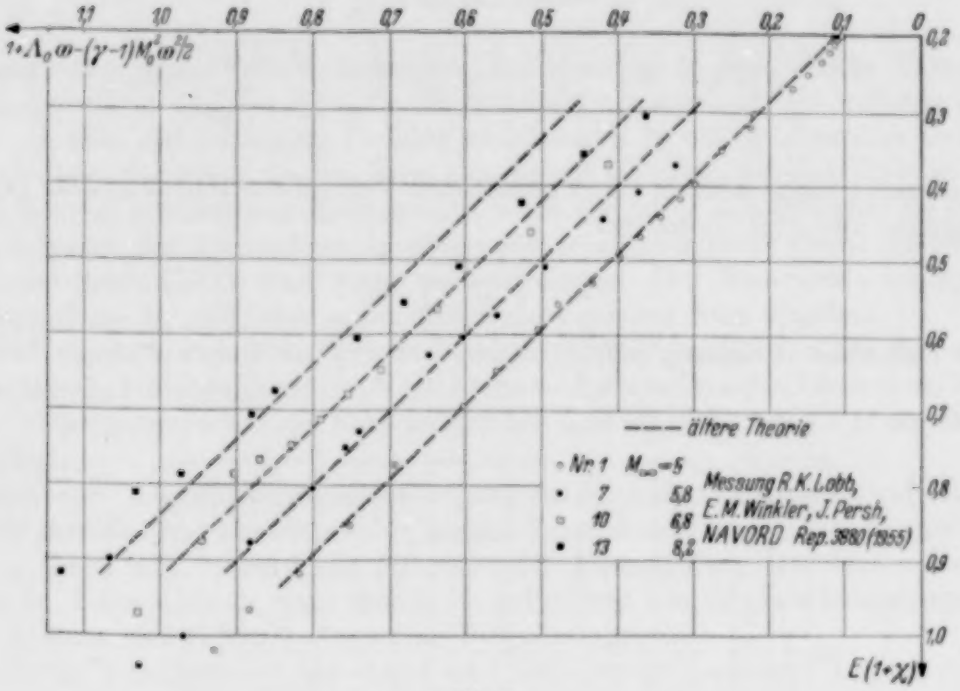


Abb. 3.

6. Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen. Die Gleichungen (21) und (22) ermöglichen bei Zugrundelegung einer Hypothese über den turbulenten Austausch die Berechnung der Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung. Als eine solche Hypothese bietet sich die *Prandtl*sche Mischungsweghypothese

$$\varepsilon = \varkappa^2 y^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\varepsilon}{\nu_0} = \varkappa^2 \eta^2 \frac{\partial \omega}{\partial \eta}. \tag{28}$$

Einsetzen von (28) in die Gleichung (23)

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta}\right)^2 = \frac{1+\chi}{\varkappa^2 \eta^2} \frac{1+\Lambda_0\,\omega-(\gamma-1)\,M_0^2\,\omega^2/2}{1+(\gamma-1)\,M_0^2\,\omega^2/2} \tag{29}$$

ergibt dann

$$\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = C^{\frac{1}{2E}} \frac{1}{\varkappa} \frac{1}{\eta} \frac{[1+\Lambda_0\,\omega-(\gamma-1)\,M_0^2\,\omega^2/2]^{\frac{E+1}{2E}}}{\sqrt{1+(\gamma-1)\,M_0^2\,\omega^2/2}}$$

bzw.

$$\frac{1}{\varkappa} \ln \eta + D = C^{-\frac{1}{2E}} \int_0^\omega \frac{\sqrt{1+(\gamma-1)\,M_0^2\,\omega^2/2}}{[1+\Lambda_0\,\omega-(\gamma-1)\,M_0^2\,\omega^2/2]^{\frac{E+1}{2E}}}\, d\omega \tag{30}$$

mit der Integrationskonstanten D.

Spezialfälle: 1) $M_0 = 0$ bzw. Dissipation vernachlässigbar. Nach (25) haben wir

$$(1+\chi)^E = C\,(1+\Lambda_0\,\omega), \tag{31}$$

während aus (30) folgt

$$1+\Lambda_0\,\omega = \left[C^{\frac{1}{2E}} \Lambda_0 \frac{E-1}{2E}\left(\frac{1}{\varkappa} \ln \eta + D\right) + 1\right]^{\frac{2E}{E-1}}. \tag{32}$$

2) $\Lambda_0 = 0$ bzw. wärmeisolierte Wand.

Gleichung (25) ergibt die Relation

$$(1+\chi)^E = C\left[1-(\gamma-1)\,M_0^2\,\frac{\omega^2}{2}\right], \tag{33}$$

und (30) ergibt mit $\omega_1 = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\,M_0\,\omega$

$$C^{\frac{1}{2E}}\left(\frac{1}{\varkappa}\ln\eta + D\right) = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}\,\frac{1}{M_0}\int_0^{\omega_1}\frac{\sqrt{1+\omega_1^2}}{(1-\omega_1^2)^{\frac{E+1}{2E}}}\,d\omega_1\,. \tag{34}$$

Formel (34) beschreibt (siehe Abb. 4) einen monotonen Verlauf der Kurve ω über η mit gegen Null strebender Tangente und dem Grenzwert

$$\omega_\infty = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}\,\frac{1}{M_0}\,;$$

im allgemeinen Fall siehe Gleichung (26).

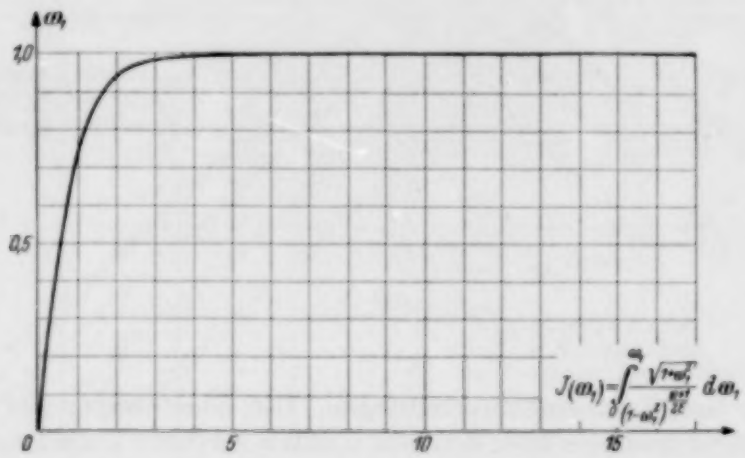


Abb. 4.

Das in Abschn. 4 über die Ermittlung der Integrationskonstanten C Gesagte gilt auch für die Integrationskonstante D. Wir fügen noch hinzu: Die bisher formulierten Hypothesen über den turbulenten Austausch enthalten bekanntlich — man denke an das logarithmische Gesetz — zwei empirische Koeffizienten, deren Charakter insbes. bei kompressiblen turbulenten Grenzschichten noch weitgehend ungeklärt ist. So zeigen z. B. Experimente[1] ein Anwachsen der laminaren Unterschicht gegenüber inkompressibler Strömung an.

7. Zusammenfassung. Berücksichtigt man die Dichteschwankungen kompressibler turbulenter Grenzschichten, so wird der Energiesatz insbes. insofern modifiziert, als im Ausdruck für die Dissipation der Strömung zu der der Hauptbewegung durch die Nebenbewegung entzogenen Energie eine durch die Dichteschwankungen bedingte Diffusion kinetischer Energie hinzutritt. Bei entsprechender Berücksichtigung der Dichteschwankungen auch im Kontinuitäts- und Impulssatz erhält man eine neue Formulierung der Relation zwischen Temperatur und Geschwindigkeit, aus der sich u. a. Grenzwerte der Geschwindigkeitsverteilungen ergeben. Der Vergleich mit Messungen ergibt eine Bestätigung der Theorie.

(Eingegangen am 1. September 1960.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *W. Szablewski*, Berlin W 8, Mohrenstr. 39.

[1] Vgl. *F. K. Hill*, Journ. Aeron. Sci. 23 (1956), S. 35.

Das Auswuchten elastischer Rotoren, ein Problem der Strukturanalyse

Von E. Hübner

1. Einleitung. Das Auswuchten elastischer Rotoren hat in den letzten Jahren zunehmende Bedeutung erlangt und ist Gegenstand zahlreicher Arbeiten geworden[1]. Die meisten Untersuchungen beschränkten sich aber auf homogene Gebilde und leiteten in rein qualitativer Betrachtungsweise die Bedingungen her, die beim Auswuchten elastischer Rotoren grundsätzlich zu beachten sind. So wertvoll die hierbei gewonnenen Erkenntnisse auch waren, so ermöglichten sie doch keineswegs, die zur Kompensation der Unwuchten in einem Rotor allgemeinster Form erforderlichen Tariermassen treffsicher nach Größe und Lage zu bestimmen. Der Auswuchtvorgang gestaltet sich weiterhin recht aufwendig und führt nicht immer zum gewünschten Ergebnis.

Von *Meldahl*[2] wurde erstmals ein Weg zur quantitativen Lösung der Aufgabe gewiesen. Jedoch bereitet die praktische Durchführung des Verfahrens — Auswuchten des Läufers bei seinen kritischen Drehzahlen — nicht unbeträchtliche Schwierigkeiten und ist nicht ohne Gefahr für Maschine und Rotor anwendbar.

Die nachstehenden Ausführungen sollen zeigen, wie die Aufgabenstellung auf ein wohldefiniertes Problem der Strukturanalyse zurückgeführt werden kann, das sich mit Hilfe der klassischen Berechnungsverfahren lösen läßt. Allerdings erfordert der Lösungsgang, zu dessen Durchführung die Eigenlösungen des Rotors bis zu einer durch die geforderte Genauigkeit festgelegten Ordnungszahl notwendig sind, einen ziemlichen Aufwand an Berechnungsarbeit.

Das entwickelte Verfahren ist für starre und nachgiebige (isotrope) Lagerung sowie auch für mehrfach gelagerte Rotoren anwendbar und gewinnt dadurch für das betriebliche Auswuchten eine gewisse Bedeutung.

Der meßtechnische Teil des Auswuchtvorganges beschränkt sich hierbei unter Ausschluß jeglichen Experimentierens mit Zusatzmassen auf das Messen von Lagerkräften (Auswuchten in starren Lagern), bzw. auf das Messen der Schwingungswege der Lager (Auswuchten in nachgiebigen Lagern) bei einigen diskreten, im Voraus passend zu wählenden Drehzahlen, die entsprechend den Sicherheitserfordernissen genügend weit ab von den kritischen Drehzahlen liegen können. Die zum Ausgleich der Unwuchten in den frei wählbaren Ausgleichsebenen anzuordnenden Tariermassen können nach vollzogener Messung rechnerisch bestimmt werden.

2. Grundbeziehungen. a) Ruhender Biegungsträger. Für den ebenen Belastungsfall läßt sich die Abhängigkeit zwischen der Durchbiegungsfunktion $y(z)$ eines geraden stabförmigen Biegungsträgers mit kontinuierlich verteilter Masse und Steifigkeit und der Belastungsfunktion $p(z)$ unter der hier zulässigen Vernachlässigung des Schubspannungseinflusses in der bekannten quellenmäßigen Darstellung zu

$$y(z) = \int G(z, \zeta)\, p(\zeta)\, d\zeta\,, \tag{1a}$$

mit $G(z, \zeta)$ als *Green*scher Funktion, anschreiben.

Wirken auf den Träger zwei verteilte ebene Belastungen $p_1(z)$ und $p_2(z)$ in zwei zu einander senkrechten Ebenen, so ergeben sich die Durchbiegungen der elastischen Linie aufgrund des Überlagerungssatzes als geometrische Summe der in den einzelnen Belastungsebenen hervorgerufenen Biegepfeile $y_1(z)$ und $y_2(z)$. Da man die beiden verteilten Belastungen als Projektionen einer räumlich verteilten Belastung senkrecht zur Trägerachse auffassen kann, ist damit der Weg gewiesen, wie sich zu einer räumlich verteilten Belastung die Biegepfeile, die in ihrer Gesamtheit die räumliche Durchbiegungsfunktion bestimmen, finden läßt. Die für die beiden Teilbelastungen eines Biegeträgers mit rotationssymmetrischen Querschnitten geltenden Gleichungen

$$y_1(z) = \int G(z, \zeta)\, p_1(\zeta)\, d\zeta\,, \qquad y_2(z) = \int G(z, \zeta)\, p_2(\zeta)\, d\zeta$$

können mit Hilfe der symbolisch-komplexen Schreibweise durch eine einzige Gleichung

$$\hat{y}(z) = \int G(z, \zeta)\, \hat{p}(\zeta)\, d\zeta \tag{1b}$$

[1] Ausführliche Schrifttumshinweise finden sich beispielsweise bei *H. Becker*, ATM, V 8224—9 (1960), S. 76.
[2] *A. Meldahl*, Z. angew. Math. Mech. 34 (1954), S. 317.

ausgedrückt werden, in der die durch einen dachförmigen Akzent gekennzeichneten und durch

$$\hat{p}(z) = p_1(z) + i\, p_2(z) \quad \text{als komplexe Belastungsfunktion,}$$
$$\hat{y}(z) = y_1(z) + i\, y_2(z) \quad \text{als komplexe Durchbiegungsfunktion}$$

(mit $i = \sqrt{-1}$) definierten Größen die Belastung und die Durchbiegung des Trägers nach Betrag und Phase, bezogen auf eine feste Bezugsebene, bestimmen.

b) Schwingender Biegungsstab. Die die Schwingungsbewegung eines kontinuierlichen stabförmigen Biegungsträgers, der durch eine verteilte, zeitlich harmonisch veränderliche Erregerkraft mit der Kreisfrequenz $\Omega = \sqrt{\lambda}$ und der Amplitudenfunktion $p(z)$ zu erzwungenen Schwingungen erregt wird, in quellenmäßiger Darstellung beschreibende Gleichung

$$y(z) = \int G(z, \zeta)\, [\lambda\, \varrho(\zeta)\, y(\zeta) + p(\zeta)]\, d\zeta \tag{1c}$$

bringt den bekannten Sachverhalt zum Ausdruck, wonach man den Vorgang als quasistationären Belastungsfall behandeln kann, wenn als Belastung des ruhend zu denkenden Biegeträgers die Summe aus den Erregerkräften und den *d'Alembert*schen Trägheitskräften

$$p^*(z) = \lambda\, \varrho(z)\, y(z) + p(z) \tag{1d}$$

eingeführt wird.

Die Amplitudenfunktion $y(z)$ kann aufgrund des Entwicklungssatzes mit ${}^r y(z)$ als den Eigenfunktionen, und k_r als den Entwicklungskoeffizienten (auch Normalkoordinaten oder generalisierte Koordinaten genannt) als Summe

$$y(z) = \sum_{r=1}^{\infty} k_r\, {}^r y(z) \tag{2a}$$

angeschrieben werden. Die Entwicklungskoeffizienten sind dabei in bekannter Weise durch

$$k_r = \frac{\frac{1}{\lambda} \int p(z)\, {}^r y(z)\, dz}{\mu_r\, (\lambda_r/\lambda - 1)} \tag{2b}$$

bestimmt, wobei λ_r die Eigenwerte und

$$\mu_r = \int {}^r y^2(z)\, \varrho(z)\, dz$$

die generalisierten Massen des Gebildes darstellen.

c) Umlaufender Biegungsträger. Man denke sich ein rotationssymmetrisches stabförmiges Gebilde durch Radialschnitte in infinitesimal dünne Scheiben von der Masse

$$dm = \varrho(z)\, dz\,,$$

mit $\varrho(z)$ als Massenbelag, zerlegt. Als Folge von Werkstoff-Inhomogenitäten und kleiner Bearbeitungsfehler werden die Schwerpunkte der Scheiben im allgemeinen nicht in die Rotationsachse fallen. Es werde angenommen, daß die von der Gesamtheit der Schwerpunkte gebildete Schwerelinie des unverformten Gebildes eine zumindest abschnittsweise stetig verlaufende, räumlich gekrümmte Linie darstellt, die durch ihre Projektionen auf die beiden zueinander senkrecht stehenden körperfesten Kraftebenen gegeben sei. Der Abstand des Schwerpunktes einer elementaren Scheibe von der Rotationsachse, die Exzentrizität, ist dann durch zwei Projektionen bestimmt und kann in symbolisch-komplexer Schreibweise durch eine komplexe Zahl ausgedrückt werden. Diese ist eine Funktion der Lagekoordinate z und werde als komplexer Exzentrizitätsbelag $\hat{e}(z)$ bezeichnet.

Das Gebilde laufe mit der Winkelgeschwindigkeit Ω gleichförmig um. Unter der Wirkung der bei der Rotation hervorgerufenen Fliehkraftbelastung werden Verformungen auftreten. Mit $\Omega^2 = \lambda$ und der Belastungsfunktion

$$p^*(z) = \Omega^2\, [\hat{y}(z) + \hat{e}(z)]\, \varrho(z) \tag{3}$$

ergibt sich unter Vernachlässigung der Kreiselwirkung die komplexe Durchbiegungsfunktion gemäß (1b) zu

$$\hat{y}(z) = \lambda \int G(z, \zeta)\, [\hat{y}(\zeta) + \hat{e}(\zeta)]\, \varrho(\zeta)\, d\zeta\,.$$

Trägt das Gebilde zusätzlich m diskrete Massen M_j mit den Exzentrizitäten $\hat{e}_j$, so kann die Belastungsfunktion durch

$$p^*(z) = \lambda \left[(\hat{y}(z) + \hat{e}(z))\, \varrho(z) + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(z)\, M_j (\hat{y}(z_j) + \hat{e}_j) \right]$$

bzw.

$$p^*(z) = \lambda\left(\varrho(z) + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(z)\, M_j\right) y(z) + \lambda\left(\hat{e}(z)\, \varrho(z) + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(z)\, M_j\, \hat{e}_j\right) \tag{4}$$

ausgedrückt werden. Hierbei bedeuten die Größen $\varphi_j(z)$ sogenannte Nadelfunktionen (im englischsprachigen Schrifttum Dirac-delta-functions genannt) gemäß Abb. 1, die den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \varphi_j(z) &= 0 \quad \text{für} \quad z_j > z > z_j + \delta\,, \\ \varphi_j(z) &= A \quad \text{für} \quad z_j < z < z_j + \delta \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

mit $\delta \to 0$ und $\lim_{\delta \to 0} A\delta = 1$ genügen.

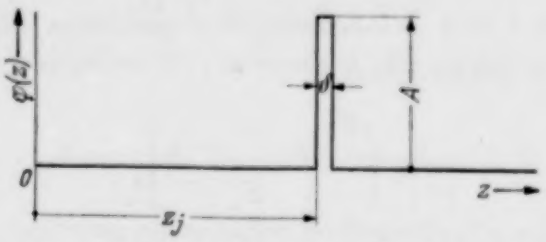


Abb. 1. Nadelfunktion $\varphi(z)$ (Dirac-delta-functions).

Die Belastungsfunktion $p^*(z)$ in (4) stimmt formal mit der in (1d) dargestellten Funktion überein. Aus diesem Grunde kann die gesuchte Durchbiegungsfunktion des umlaufenden Rotors als Linearkombination der dem Gebilde zugehörigen Eigenfunktionen analog zu (2a) durch

$$\hat{y}(z) = \sum \hat{k}_r\, {}^r y(z) \tag{6a}$$

mit den komplexen Entwicklungskoeffizienten

$$\hat{k}_r = \frac{\int \left(\hat{e}(z)\, \varrho(z) + \sum_j \varphi_j(z)\, M_j\, \hat{e}_j\right) {}^r y(z)\, dz}{\mu_r(\lambda_r/\lambda - 1)} \tag{6b}$$

dargestellt werden. Mit den Setzungen

$$\hat{u}(z) = \varrho(z)\, \hat{e}(z) \tag{6c}$$

als komplexer Unwuchtbelag und

$$\hat{u}_j = M_j\, \hat{e}_j \tag{6d}$$

als komplexe Unwuchten[1] der Einzelmassen ergibt sich aus (6b) nach teilweiser Integration

$$\hat{k}_r = \frac{\int {}^r y(z) \cdot \hat{u}(z)\, dz + \sum_j {}^r y(z_j)\, \hat{u}_j}{\mu_r\,(\lambda_r/\lambda - 1)}\,. \tag{6e}$$

Das Integral im Zähler des Bruches auf der rechten Seite der Gleichung kann mit Hilfe der bekannten Quadraturformeln[2] (Trapezregel, *Simpson*sche Formel oder *Gauß*sche Formel) in eine Summe gemäß

$$\int {}^r y(z)\, \hat{u}(z)\, dz = \sum_{i=1}^{n} W_i\, {}^r y(z_i)\, \hat{u}(z_i)$$

umgewandelt werden, in der die Größen W_i durch die Wahl des Integrationsverfahrens festgelegte „Gewichte" sind, die beispielsweise bei der *Simpson*-Formel die bekannte Folge $h/3\ \ 4/3\ h\ \ 2/3\ h\ \ 4/3\ h \cdots h/3$, mit h als Intervallbreite, bilden. Damit geht (6e) in

$$\hat{k}_r = \frac{\sum_i W_i\, {}^r y(z_i)\, \hat{u}(z_i) + \sum_j {}^r y(z_j)\, \hat{u}_j}{\mu_r\,(\lambda_r/\lambda - 1)} \tag{6f}$$

über. Die Gesamtheit der Entwicklungskoeffizienten läßt sich in Matrizenschreibweise zu einem Spaltenvektor zusammenziehen. Mit den Setzungen

$${}^r\underline{\mathfrak{y}} = \begin{pmatrix} {}^r y(z_1) \\ {}^r y(z_2) \\ {}^r y(z_3) \\ \vdots \\ {}^r y(z_n) \end{pmatrix} \tag{7a}$$

[1] Entgegen der üblichen Bezeichnungsweise sei hier unter Unwucht das Produkt Masse mal Achsabstand verstanden.

[2] Siehe etwa *F. A. Willers*, Methoden der praktischen Analysis, 3. Auflage, S. 137 und S. 152, Berlin 1957.

als approximierender n-dimensionaler Eigenvektor r-ter Ordnung,

$$\hat{\mathfrak{U}} \equiv \begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \\ \hat{U}_3 \\ \vdots \\ \hat{U}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1\,\hat{u}(z_1) + \hat{u}_1 \\ W_2\,\hat{u}(z_2) + \hat{u}_2 \\ W_3\,\hat{u}(z_3) + \hat{u}_3 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ W_n\,\hat{u}(z_n) + \hat{u}_n \end{pmatrix} \tag{7b}$$

als n-dimensionaler Spaltenvektor der Unwuchten[1] des Rotors erhält man aus (6f) mit (7)

$$\hat{k}_r = \frac{1}{\mu_r(\lambda_r/\lambda - 1)}\,{}^r\mathfrak{x}'\,\hat{\mathfrak{U}}\,, \tag{8a}$$

woraus sich schließlich mit der Diagonalmatrix

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & F_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{8b}$$

deren Elemente durch

$$F_r = \frac{1}{\mu_r(\lambda_r/\lambda - 1)} \qquad (r = 1, 2, 3 \ldots) \tag{8c}$$

bestimmt werden, und der Matrix der approximierenden Eigenvektoren

$$\mathfrak{X} = ({}^1\mathfrak{x}\;{}^2\mathfrak{x}\;{}^3\mathfrak{x} \ldots) \tag{8d}$$

der Spaltenvektor der Entwicklungskoeffizienten endlich zu

$$\hat{\mathfrak{f}} \equiv \begin{pmatrix} \hat{k}_1 \\ k_2 \\ \hat{k}_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathfrak{F}\,\mathfrak{X}'\,\hat{\mathfrak{U}} \tag{8e}$$

errechnet. Die in den durch die gewählten Teilungspunkte des Integrationsbereiches gelegten Radialebenen — sie seien Meßebenen genannt — herrschenden (komplexen) Durchbiegungen ergeben sich dann aus (6a):

$$\hat{y}(z_i) = \sum_{r=1}^{\infty} \hat{k}_r\,{}^r y(z_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Die Gesamtheit dieser Größen kann zu einem n-dimensionalen Spaltenvektor zusammengezogen werden, der sich mit (8d) und (8e) zu

$$\mathfrak{y} \equiv \begin{pmatrix} \hat{y}(z_1) \\ \hat{y}(z_2) \\ \hat{y}(z_3) \\ \vdots \\ \hat{y}(z_n) \end{pmatrix} = \mathfrak{X}\,\hat{\mathfrak{f}} \equiv \mathfrak{X}\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{X}'\,\hat{\mathfrak{U}} \tag{9}$$

ergibt.

3. Rotor auf starren Stützen. a) Auflagerkräfte. Die zwischen der Belastungsfunktion $p(z)$ und der die Durchbiegungen beschreibenden Funktion $y(z)$ gemäß (1a) geltende Grundbeziehung der Elastizitätslehre kann mit Hilfe der sogenannten Steifigkeitsfunktion $C(z, \zeta)$ auch durch

$$p(z) = \int C(z, \zeta)\, y(\zeta)\, d\zeta$$

dargestellt werden. Unter Beachtung von (6a) erhält man daraus mit den Setzungen

$${}^r p(z) = \int C(z, \zeta)\,{}^r y(\zeta)\, d\zeta \qquad (r = 1, 2, 3 \ldots)$$

[1] Da im allgemeinen nicht in allen Meßebenen Einzelmassen angeordnet sein werden, können einzelne (oder alle) Glieder $\hat{u}_j$ in $\hat{\mathfrak{U}}$ verschwinden.

als den den Eigenformen zugeordneten Belastungsfunktionen, den Eigenform-Belastungsfunktionen,

$$\hat{p}(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \hat{k}_r \, {}^r p(z) \,. \tag{10}$$

Diese Gleichung drückt den bekannten Satz aus, daß eine beliebig vorgegebene Belastungsfunktion nach Eigenform-Belastungsfunktionen entwickelt werden kann.

Bezeichnet man die bei der Verformung eines Biegeträgers in einer Eigenform auf die Stützen wirksam werdenden Kräfte — sie mögen, ebenso wie die Eigenwerte und Eigenfunktionen aus einer Schwingungsberechnung herrührend als bekannt vorausgesetzt werden — mit

$$ {}^r S_i \quad (r = 1, 2, 3 \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, l) \,,$$

wobei r die Ordnungszahl der zugehörigen Eigenfunktion und l die Anzahl der Stützen sei, so ergeben sich die bei einer vorgegebenen Verformung des Gebildes herrschenden Auflagerkräfte wegen (10) zu

$$\hat{A}_i = \sum_{r=1}^{\infty} \hat{k}_r \, {}^r S_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, l) \,. \tag{11a}$$

Faßt man die zu einer Eigenfunktion gehörenden Auflagerkräfte zu einer Spaltenmatrix

$$ {}^r\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} {}^r S_1 \\ {}^r S_2 \\ {}^r S_3 \\ \vdots \\ {}^r S_l \end{pmatrix}$$

zusammen, so kann man deren Gesamtheit zu der Matrix der Eigenform-Auflagerkräfte

$$\mathfrak{S} = ({}^1\mathfrak{S} \; {}^2\mathfrak{S} \; {}^3\mathfrak{S} \ldots)$$

vereinigen. Bildet man noch den Spaltenvektor der zu einer gegebenen Verformung gehörenden Auflagerkräfte, der in transponierter Schreibweise durch

$$\hat{\mathfrak{A}}' = (\hat{A}_1 \, \hat{A}_2 \ldots \hat{A}_l) \tag{11b}$$

gegeben ist, so können die Gleichungen (11a) zu einer Matrizengleichung

$$\hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{S} \, \hat{k}$$

zusammengezogen werden, die schließlich mit (8e) die endgültige Form

$$\hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{S} \, \mathfrak{F} \, \mathfrak{X}' \, \hat{\mathfrak{U}} \tag{11c}$$

annimmt.

Die Auflagerkräfte erscheinen als lineare Funktionen der Unwuchten $\hat{U}_i$. Bestimmt man daher mittels Messung die an den Auflagern eines mit der Winkelgeschwindigkeit Ω umlaufenden Rotors wirksam werdenden Auflagerkräfte nach Betrag und Phase (bezogen auf die rotorfeste Bezugsebene), so läßt sich die gesuchte, durch den Spaltenvektor $\hat{\mathfrak{U}}$ beschriebene (approximierende) Unwuchtverteilung am Rotor durch Auflösen des Gleichungssystems (11c) berechnen.

b) Lösbarkeitsbedingung. Bei einem kontinuierlichen Gebilde geht die Anzahl der Freiheitsgrade gegen Unendlich. Die Ordnungszahl der Matrizen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{X}$ in (11c) übersteigt daher alle Grenzen. Erfahrungsgemäß ist der Einfluß der Eigenlösungen höherer Ordnungszahl von vernachlässigbarer Größenordnung, so daß man bei diesen Matrizen nur eine endliche Zahl von Eigenlösungen — ihre höchste Ordnungszahl sei mit σ bezeichnet — zu berücksichtigen braucht. In Abb. (2a) ist die Matrizengleichung (11c) in einem geometrischen Schema aufgezeichnet, in dem die an den Kästchen angeschriebenen Indizes die Anzahl der Spalten und Reihen der Matrizen kennzeichnen sollen. Man erkennt, daß sich bei der Ausrechnung des Matrizenproduktes $\mathfrak{S} \, \mathfrak{F} \, \mathfrak{X}'$ eine (l, n)-Matrix ergibt. Da $n > l$ ist, bedeutet dies, daß zur Bestimmung der n Unbekannten $\hat{U}_i$ zu wenig Gleichungen zur Verfügung stehen.

Die noch fehlenden Gleichungen lassen sich einfach dadurch beschaffen, daß man mehrere, beispielsweise ε Meßläufe bei entsprechend zu wählenden Winkelgeschwindigkeiten $\Omega_1, \Omega_2 \ldots \Omega_\varepsilon$ vornimmt. Für die einzelnen Meßläufe kann man je eine Gleichung gemäß (11c)

$$\hat{\mathfrak{A}}_e = \mathfrak{S} \, \mathfrak{F}_e \, \mathfrak{X}' \, \hat{\mathfrak{U}} \qquad (e = 1, 2, 3 \ldots \varepsilon) \tag{11d}$$

anschreiben, die in ihrer Gesamtheit mit der in transponierter Darstellung geschriebenen Matrix

$$\hat{\mathfrak{A}}^{\bullet\prime} = (\hat{\mathfrak{A}}_1' \, \hat{\mathfrak{A}}_2' \ldots \hat{\mathfrak{A}}_\varepsilon') \tag{11e}$$

durch die Gleichung

$$\hat{\mathfrak{A}}^{\bullet} = \mathfrak{L} \, \hat{\mathfrak{U}} \,, \tag{11f}$$

die in Abb. (2b) schematisch dargestellt ist, ausgedrückt werden können, deren Auflösung schließlich die gesuchte Unwuchtverteilung

$$\hat{\mathfrak{U}} = \mathfrak{L}^{-1} \, \hat{\mathfrak{A}}^{\bullet} \tag{11g}$$

liefert.

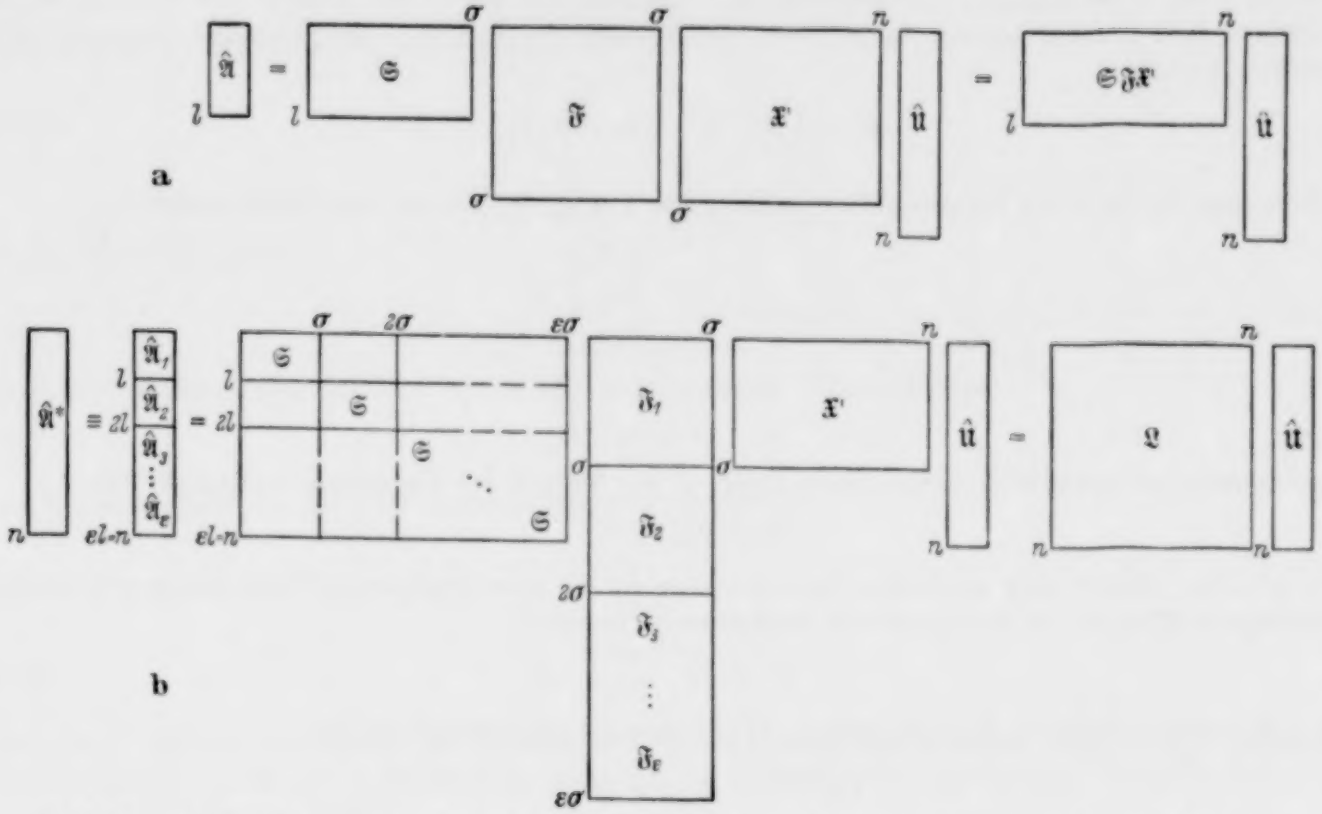


Abb. 2. Schematische Darstellung der Matrizengleichungen (11d) und (11f). — a) für eine Meßlaufgruppe; b) für ε-Meßlaufgruppen

Das Gleichungssystem (11f) kann nur dann nach $\hat{\mathfrak{U}}$ aufgelöst werden, wenn die Produktmatrix $\mathfrak{L}$ nichtsingulär ist, wenn also

$$\varepsilon \, l = n$$

ist. Bei unganzzahligem Quotienten n/l ergeben sich überzählige Gleichungen, die bei der Auflösung gestrichen werden müssen. Wurde beispielsweise $n = 10$ bei $l = 3$ gewählt, dann sind wegen $\varepsilon = 10/3$ vier Meßläufe vorzunehmen. Von den dann zur Verfügung stehenden 12 Gleichungen dürfen aber nur 10 für die Weiterrechnung verwendet werden. In diesem Falle wäre es ratsam, entweder die Zahl der Meßebenen auf $n = 12$ zu erhöhen (ergibt bei gleichem Meßaufwand ein genaueres Ergebnis), oder $n = 9$ zu wählen, um mit $\varepsilon = 9/3 = 3$ Meßläufen auszukommen.

Es ist bei einem mehrfach gelagerten Rotor nicht unbedingt erforderlich, die Auflagerkräfte in allen Stützen zu messen, sofern es der konstruktive Aufbau des Rotors gestattet, die dann zusätzlich notwendig werdenden Meßläufe bei hohen Drehzahlen vorzunehmen. Die hiermit verbundene Vereinfachung des meßtechnischen Aufwandes, es sei nur auf das betriebliche Auswuchten verwiesen, kann oftmals sehr erwünscht sein.

c) **Meßlaufdrehzahlen.** Die Elemente der Diagonalmatrizen $\mathfrak{F}_\bullet$ sind nicht nur von der Ordnungszahl der Eigenlösungen, sondern auch noch von der Umdrehungszahl des Rotors sehr stark abhängig. Bei ungünstig gewählten Drehzahlen kann unter Umständen der Einfluß wesentlicher Elemente von $\mathfrak{F}_\bullet$ auf die Bildung der Produktmatrix $\mathfrak{L}$ im Störpegel der Meßanordnung untergehen, so daß dann im Verein mit den beim numerischen Rechnen unvermeidlich auftretenden Abrundungsfehlern die Auflösung des Gleichungssystems (11f) in Frage gestellt werden könnte.

Zur Wahrung der linearen Unabhängigkeit dieser Gleichungen müssen deshalb die Meßlaufdrehzahlen so gewählt werden, daß die Matrix $\mathfrak{L}$ einen möglichst großen Betrag annimmt. Dies ist dann zu erreichen, wenn die von den Elementen F_r gebildete Wertefolge bei jeder Drehzahl möglichst stark verzerrt wird, ganz besonders aber dann, wenn bei den einzelnen Meßläufen jeweils eine andere Eigenform besonders kräftig herausgehoben wird.

Wieviele Eigenformen beim Aufbau der Matrizen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{X}$ zu berücksichtigen sind, d. h., wie groß die Ordnungszahl σ gewählt werden muß, hängt ab von den jeweils vorliegenden Gegebenheiten und ist von Fall zu Fall zu entscheiden. Die hierbei grundsätzlich zu beachtenden Beziehungen seien an Hand eines einfachen Gebildes, eines zweifach gelagerten homogenen Rotors, kurz erörtert, für den in Abb. (3) die Drehzahlabhängigkeit der Matrizenelemente F_r in dimensionsloser Form dargestellt ist. Man erkennt, daß der Einfluß der Elemente höherer Ordnungszahlen

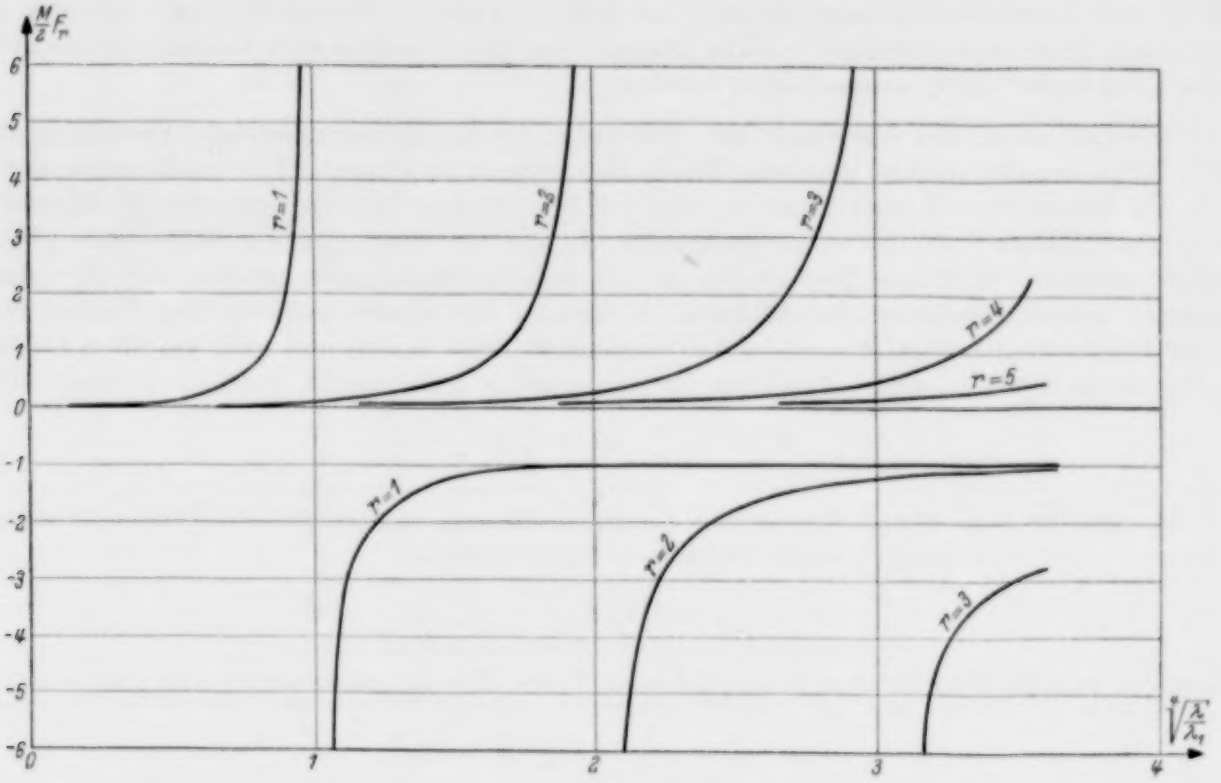


Abb. 3. Frequenzabhängigkeit der Elemente F_r der Diagonalmatrix $\mathfrak{F}$ für einen homogenen zweifach gelagerten Biegungsträger. (M = Masse des Trägers; λ_1 = Eigenwert 1-ter Ordnung; $\sqrt[4]{\lambda} = \Omega$ = Erregerkreisfrequenz.)

desto kleiner wird, je näher die Meßdrehzahlen an die kritischen Drehzahlen zu liegen kommen, bzw., daß umsomehr Eigenformen berücksichtigt werden müssen, je weiter man von den kritischen Drehzahlen abbleiben will. Im allgemeinen wird man mit $\sigma = \varepsilon$ eine ausreichende Genauigkeit erlangen. Daraus folgt aber, daß man die Anzahl der Meßebenen in Einklang mit der Stützenzahl l und der als größtzulässig erachteten Meßlaufdrehzahl wählen muß.

Selbstverständlich wird man Messungen bei überkritischen Drehzahlen nur mit vorgewuchtetem Rotor vornehmen können. Sollte es sich als notwendig erweisen, innerhalb einer Meßreihe zusätzliche Tarierunwuchten zur Erhöhung der Laufruhe anzuordnen, so braucht man den bereits gefahrenen Teil der Reihe keineswegs zu wiederholen, da der Einfluß der Zusatzunwuchten rechnerisch berücksichtigt werden kann. Der hierfür erforderliche Rechnungsgang gestaltet sich analog zu dem in Abschnitt **5** beschriebenen Verfahren, so daß hier auf Einzelheiten verzichtet werden kann.

Zu erwähnen wäre noch, daß bei den Meßläufen keinerlei Auswuchtarbeiten im engeren Sinne zu leisten sind, so daß man die vorgesehenen Meßdrehzahlen nur kurzzeitig während des Ablesens der Meßwerte einzuhalten braucht und unter Umständen ein ganzer Satz von Meßdrehzahlen in einem Zuge durchfahren werden kann.

d) Genauigkeit des Verfahrens. Die Genauigkeit, mit der die durch (11g) festgelegte Unwuchtverteilung mit dem wirklich vorhandenen Unwuchtverlauf übereinstimmt, hängt naturgemäß ab von der Anzahl der berücksichtigten Eigenlösungen, von der Art des angewendeten

Integrationsverfahrens und der Zahl der Integrationsintervalle. Gute Ergebnisse liefert die auf die *Lagrange*sche Interpolationsformel gegründete *Gauß*sche Quadraturformel, bei der der Integrand durch eine ganze rationale Funktion n-ten Grades (n = Anzahl der Meßebenen) ersetzt wird[1]. Die Unterteilung kann dabei in Intervalle beliebiger Breite vorgenommen werden (besonders wichtig, wenn am Rotor Einzelmassen zu berücksichtigen sind, oder wenn einige Meßebenen in die am Rotor konstruktiv vorgesehenen Ausgleichsebenen gelegt werden sollen), im Gegensatz zur *Simpson*-Formel, bei der eine äquidistante Intervallteilung gefordert wird, und die Annäherung an die wirkliche Funktion nur vom zweiten Grade ist.

Die Anwendung der Quadraturformeln setzt einen stetigen Integranden voraus. Unstetigkeiten müssen bekanntlich durch Unterteilung des Integrationsbereiches in Teilabschnitte berücksichtigt werden. Während man bei Läufern mit diskreten Massen den Sitz möglicher Unwuchten von vornherein kennt, lassen sich bei kontinuierlichen Gebilden keinerlei Voraussagen über den Verlauf der Unwuchtverteilung machen, so daß eventuell auftretende Unstetigkeiten bei der Berechnung nicht berücksichtigt werden können. Die hier grundsätzlich liegende Quelle möglicher Fehler kann leider nicht ausgeschaltet werden.

e) Austarieren der Unwuchten. Mit (11g) ist die approximierende Verteilung der Unwucht längs der Rotorachse gegeben. Durch Hinzufügen von entsprechenden Zusatzmassen, bzw. durch Entfernen von Körpermasse in den der Berechnung zugrundegelegten Meßebenen lassen sich die errechneten Unwuchten kompensieren. In diesem Falle sind die Meßebenen gleichzeitig Ausgleichsebenen. Will man den Ausgleich nicht in allen Meßebenen, sondern nur in einigen vorgegebenen Ausgleichsebenen durchführen, so können die hierfür notwendigen Tarierunwuchten aus der Forderung hergeleitet werden, daß im umlaufenden Rotor, und zwar bei allen Drehzahlen, die Eigenformen bis zu einer gewählten Ordnungszahl o unterdrückt werden. Es muß also

$$\hat{k}_s = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, o)$$

erfüllt sein.

Faßt man die Gesamtheit der in den Ausgleichsebenen anzuordnenden Tarierunwuchten $\hat{U}_{Ti}$ in einen — hier transponiert geschriebenen — Spaltenvektor

$$\hat{\mathfrak{U}}'_T = (\hat{U}_{T_1}\, \hat{U}_{T_2} \ldots \hat{U}_{T_n})$$

zusammen, so geht (8a) für den ausgeglichenen Rotor über in

$$\hat{k}_s = \frac{1}{\mu_s(\lambda_s/\lambda - 1)}\, {}^s\mathfrak{x}'\,(\hat{\mathfrak{U}} + \hat{\mathfrak{U}}_T)\,.$$

Die Auswuchtbedingung, das Verschwinden der ersten o-Eigenformen führt dann zu den o-Gleichungen

$${}^s\mathfrak{x}'\,(\hat{\mathfrak{U}} + \hat{\mathfrak{U}}_T) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, o)\,, \tag{12a}$$

aus denen sich die Tarierunwuchten berechnen lassen. Ordnet man beispielsweise mit $o = 3$ die Ausgleichsebenen in der in Abb. 4a gekennzeichneten Lage an, so nimmt der Spaltenvektor $\hat{\mathfrak{U}}_T$, wieder transponiert geschrieben, die Form

$$\hat{\mathfrak{U}}'_T = (0\,0\,\hat{U}_{T_3}\,0\,\hat{U}_{T_5}\,0\,0\,\hat{\mathfrak{U}}_{T_8}\,0) \tag{12b}$$

an, mit der sich aus (12a) ein inhomogenes Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} {}^1y(z_3)\,\hat{U}_{T_3} + {}^1y(z_5)\,\hat{U}_{T_5} + {}^1y(z_8)\,\hat{U}_{T_8} &= -\,{}^1\mathfrak{x}'\,\hat{\mathfrak{U}}\,,\\ {}^2y(z_3)\,\hat{U}_{T_3} + {}^2y(z_5)\,U_{T_5} + {}^2y(z_8)\,\hat{U}_{T_8} &= -\,{}^2\mathfrak{x}'\,\hat{\mathfrak{U}}\,,\\ {}^3y(z_3)\,\hat{U}_{T_3} + {}^3y(z_5)\,\hat{U}_{T_5} + {}^3y(z_8)\,\hat{U}_{T_8} &= -\,{}^3\mathfrak{x}'\,\hat{\mathfrak{U}} \end{aligned}\right\} \tag{12c}$$

ergibt, das mit (11g) und den Setzungen

$$\mathfrak{X}^*_T = \begin{pmatrix} {}^1y(z_3) & {}^2y(z_3) & {}^3y(z_3)\\ {}^1y(z_5) & {}^2y(z_5) & {}^3y(z_5)\\ {}^1y(z_8) & {}^2y(z_8) & {}^3y(z_8) \end{pmatrix}$$

[1] Siehe Fußnote 2 von S. 327, sowie Tables of Lagrangian Interpolation Coefficients, National Bureau of Standards, New York 1944.

als Matrix der reduzierten Eigenvektoren

$$\mathfrak{X}^* = ({}^1\mathfrak{x}\ {}^2\mathfrak{x}\ {}^3\mathfrak{x})$$

als verkürzte Matrix der Eigenvektoren,

$$\hat{\mathfrak{U}}_T^* = \begin{pmatrix} \hat{U}_{T_2} \\ \hat{U}_{T_5} \\ \hat{U}_{T_8} \end{pmatrix}$$

als reduzierten Spaltenvektor der Tarierunwuchten, nach dem gesuchten reduzierten Vektor der Tarierunwuchten aufgelöst werden kann:

$$\hat{\mathfrak{U}}_T^* = -(\mathfrak{X}_T^{*\prime})^{-1}\,\mathfrak{X}^{*\prime}\,\hat{\mathfrak{U}} = -(\mathfrak{X}_T^{*\prime})^{-1}\,\mathfrak{X}^{*\prime}\,\mathfrak{L}^{-1}\,\hat{\mathfrak{A}}^* . \tag{12d}$$

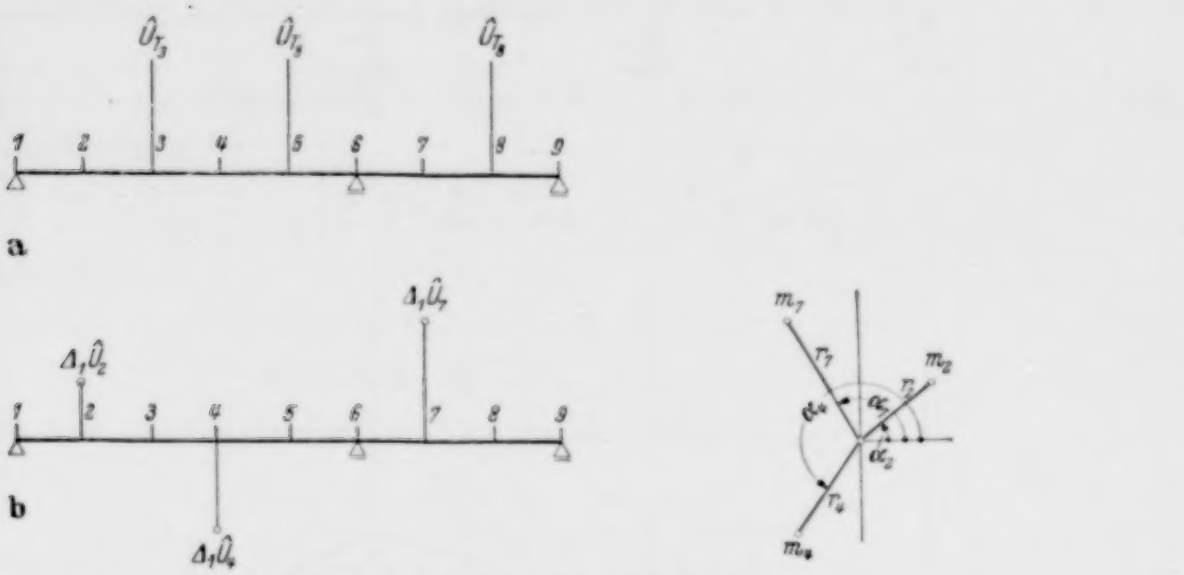


Abb. 4. Dreifach gelagerter Rotor mit $n = 9$ Meßebenen.

a) Tarierunwuchten in drei Ausgleichsebenen;
b) Anordnung von Probe-Unwuchten in drei Meßebenen zur experimentellen Ermittlung der Lösungsmatrix $\mathfrak{L}^{-1}$ (siehe Gl. 16c).

Aus diesen Gleichungen läßt sich die bemerkenswerte, von der in der Praxis üblichen Auffassung abweichende Tatsache ablesen, daß ganz unabhängig von der Anzahl der Rotor-Lagerungsstellen jede zu beseitigende Eigenform nur je eine Ausgleichsebene erfordert, bzw., daß mit jeder Ausgleichsebene eine Eigenform unterdrückt werden kann[1].

4. Rotor auf nachgiebigen Stützen (isotrope Lagerung). Ein mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \sqrt{\lambda}$ umlaufender elastischer Rotor mit isotroper Lagerung verformt sich unter der Wirkung nichtausgeglichener Fliehkräfte und rotiert wie ein starrer Körper. Es liegt auch hier ein quasistationäres Problem vor, das in der gleichen Weise wie unter Abschnitt **3** beschrieben, behandelt werden könnte. Dabei müßten aber die erforderlichen dynamischen Parameter auf den nachgiebig gelagerten Rotor bezogen werden, so daß die elastischen Parameter der Stützenkonstruktion implizit in den Eigenlösungen enthalten wären.Änderungen im Aufbau der Auswucht-Anordnung würden eine neuerliche Berechnung der Eigenlösungen bedingen. Aus diesem Grunde ist der nachstehend beschriebene, zwar etwas umständlich erscheinende Lösungsweg empfehlenswert, der den Vorteil besitzt, daß die elastischen Eigenschaften der Lagerung nicht in die Eigenlösungen eingehen.

Die Gesamtheit der auf den umlaufenden Rotor einwirkenden Fliehkräfte bildet mit den Reaktionen der Auflagerkräfte, den Stützkräften, ein Gleichgewichtssystem. Man kann daher ganz willkürlich zwei beliebige Kraftangriffspunkte als Auflager wählen und den verformten Rotor als zweifach gelagerten Biegungsträger auffassen, der unter der verformenden Wirkung von zwei Kräftegruppen, den Fliehkräften und den von der wirklichen Lagerung herrührenden Stützkräften, steht, wie dies beispielsweise in Abb. 5 für einen mehrfach gelagerten Rotor dargestellt ist.

[1] Optimierungsfragen mögen hier unberücksichtigt bleiben.

Die Verformungen der elastischen Linie des Rotors lassen sich hierbei in zwei Anteile zerlegen und ergeben sich als Summe aus den Durchbiegungen des zweifach gelagert gedachten Ersatzträgers und der durch die Senkung der gewählten Stützpunkte hervorgerufenen Anteile. Für eine ebene Belastung gilt für den l-fach gelagerten Rotor gemäß Abb. 5

$$q(z) = y(z) + \frac{L-z}{L}\, q_1 + \frac{z}{L}\, q_l .$$

Handelt es sich um eine nichtebene Kräftegruppe, dann kann man in symbolisch-komplexer Darstellung

$$\hat{q}(z) = \hat{y}(z) + \frac{L-z}{L}\, \hat{q}_1 + \frac{z}{L}\, \hat{q}_l \tag{13a}$$

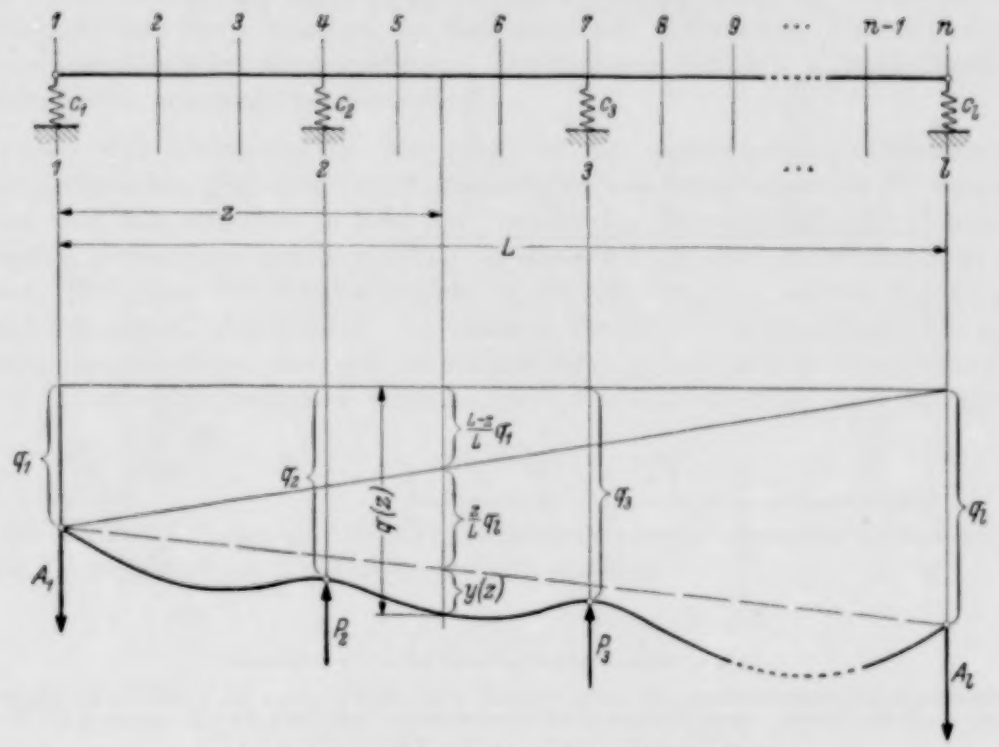


Abb. 5. Mehrfach gelagerter Rotor auf elastischen Stützen.
a) Schemazeichnung des Rotors mit Meßebenen;
b) verformter zweifach gelagert gedachter Ersatzrotor.

schreiben. Bezeichnet man die von den Lagern auf den Rotor ausgeübten Stützkräfte in komplexer Schreibweise mit $\hat{P}_i$, so ergibt sich mit den diesen Kräften zugeordneten Nadelfunktionen $\varphi_i(z)$, die den gemäß (5) analogen Bedingungen entsprechen, die komplexe Belastungsfunktion zu

$$\hat{p}^*(z) = \lambda \left[\left(\hat{q}(z) + \hat{e}(z)\right) \varrho(z) + \sum_j \varphi_j(z)\, M_j \left(\hat{q}(z_j) + \hat{e}_j\right) \right] + \sum_{i=2}^{l-1} \varphi_i(z)\, \hat{P}_i$$

bzw. mit (13a)

$$\begin{aligned} \hat{p}^*(z) = {} & \lambda \left(\varrho(z) + \sum_j \varphi_j(z)\, M_j \right) \hat{y}(z) + \lambda \left(\hat{e}(z)\, \varrho(z) + \sum_j \varphi_j(z)\, M_j\, \hat{e}_j \right) \\ & + \lambda \left(\frac{L-z}{L}\, \hat{q}_1 + \frac{z}{L}\, \hat{q}_l \right) \left(\varrho(z) + \sum_j \varphi_j(z)\, M_j \right) + \sum_i \varphi_i(z)\, \hat{P}_i . \end{aligned} \tag{13b}$$

Die in dem auch hier wählbaren Lösungsansatz

$$\hat{y}(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \hat{k}_r\, {}^r y(z)$$

enthaltenen Entwicklungskoeffizienten ergeben sich, da (13b) formal mit (1d) übereinstimmt, analog (2b) mit den Setzungen (6c) und (6d) zu

$$\begin{aligned} \hat{k}_r = \frac{1}{\mu_r (\lambda_r/\lambda - 1)} \Bigg[& \int {}^r y(z)\, \hat{u}(z)\, dz + \sum_j {}^r y(z_j)\, \hat{u}_j \\ & + \int {}^r y(z) \left(\varrho(z) + \sum_j \varphi_j(z)\, M_j \right) \left(\frac{L-z}{z}\, \hat{q}_1 + \frac{z}{L}\, \hat{q}_l \right) dz + \frac{1}{\lambda} \sum_i {}^r y(z_i)\, \hat{P}_i \Bigg] . \end{aligned} \tag{13c}$$

Bei der vorausgesetzten Isotropie der Lagerung des Rotors besteht Proportionalität zwischen den Stützkräften und den Stützenverschiebungen. Führt man die das dynamische Verhalten der Lagerkonstruktion kennzeichnenden komplexen Federkonstanten $\hat{c}_i$ ein, so lassen sich die Stützkräfte durch die Verschiebungsgrößen $\hat{q}_i$ gemäß

$$\hat{P}_i = -\hat{c}_i \hat{q}_i \tag{14a}$$

ausdrücken. Man kann die auf der rechten Seite der Gleichung (13c) stehenden Integrale wieder mit Hilfe einer der bekannten Quadraturformeln auswerten und erhält mit den durch die Parameter des Gebildes festgelegten Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} g_{r1} &= \int \frac{L-z}{L}\, {}^r y(z)\, \varrho(z)\, dz + \sum_j \frac{L-z_j}{L}\, {}^r y(z_j)\, M_j\,, \\ g_{rl} &= \int \frac{z}{L}\, {}^r y(z)\, \varrho(z)\, dz + \sum_j \frac{z_j}{L}\, {}^r y(z_j)\, M_j \end{aligned}\right\} \tag{14b}$$

und der Setzung

$${}^r y(z_i)\, \hat{c}_i = \hat{b}_{ri} \qquad (i = 2, 3, \ldots, l-1) \tag{14c}$$

die Entwicklungskoeffizienten zu

$$\hat{k}_r = \frac{1}{\mu_r (\lambda_r/\lambda - 1)} \left({}^r\mathfrak{x}'\, \hat{\mathfrak{U}} + g_{r1}\, \hat{q}_1 + g_{rl}\, \hat{q}_l - \frac{1}{\lambda} \sum_i \hat{b}_{ri}\, \hat{q}_i \right),$$

woraus sich mit den Vektoren

$$\mathfrak{g}_r' = (g_{r1}, 0, 0 \ldots 0\, g_{rl})\,,$$
$$\hat{\mathfrak{b}}_r' = (0, b_{r2}, \hat{b}_{r3} \ldots \hat{b}_{r\,l-1} 0)\,,$$

sowie dem Zeilenvektor der komplexen Lager-Verformungsgrößen

$$\hat{\mathfrak{q}}' = (\hat{q}_1\, \hat{q}_2\, \hat{q}_3 \ldots \hat{q}_l)$$

schließlich

$$\hat{k}_r = \frac{1}{\mu_r (\lambda_r/\lambda - 1)} \left[{}^r\mathfrak{x}'\, \hat{\mathfrak{U}} + \left(\mathfrak{g}_r' - \frac{1}{\lambda}\, \hat{\mathfrak{b}}_r' \right) \hat{\mathfrak{q}} \right] \tag{14d}$$

errechnet. Werden dann noch die Matrizen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{G} &= (\mathfrak{g}_1\, \mathfrak{g}_2 \ldots \mathfrak{g}_l)\,, \\ \hat{\mathfrak{B}} &= (\hat{\mathfrak{b}}_1\, \hat{\mathfrak{b}}_2 \ldots \hat{\mathfrak{b}}_l) \end{aligned}\right\} \tag{14e}$$

eingeführt, so läßt sich die Gesamtheit der Entwicklungskoeffizienten analog (8e) zu einem Spaltenvektor

$$\hat{\mathfrak{k}} = \mathfrak{F} \left[\mathfrak{x}'\, \hat{\mathfrak{U}} + \left(\mathfrak{G}' - \frac{1}{\lambda}\, \hat{\mathfrak{B}}' \right) \hat{\mathfrak{q}} \right] \tag{14f}$$

zusammenziehen.

Die auf die beiden Stützen des zugrundegelegten Ersatzrotors wirkenden Auflagerkräfte bestimmen sich wieder mit den den Eigenformen zugeordneten Auflagerkräften ${}^rS_1$ bzw. ${}^rS_l$, wenn man sich dabei auf die angenäherte Wiedergabe durch σ Eigenformen beschränkt, analog (11a) zu

$$\hat{A}_1 = \sum_{r=1}^{\sigma} \hat{k}_r\, {}^rS_1 \qquad \text{bzw.} \qquad \hat{A}_l = \sum_{r=1}^{\sigma} \hat{k}_r\, {}^rS_l\,. \tag{15a}$$

Mit (14f) und der Matrix der Eigenform-Auflagerkräfte des Ersatzrotors

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} {}^1S_1\, {}^2S_1 \ldots {}^\sigma S_1 \\ {}^1S_l\, {}^2S_l \ldots {}^\sigma S_l \end{pmatrix}$$

sowie den zu (13d) analogen Gleichungen

$$\hat{A}_1 = \hat{c}_1\, \hat{q}_1 \qquad \text{bzw.} \qquad \hat{A}_l = \hat{c}_l\, \hat{q}_l$$

lassen sich die beiden Gleichungen (15a) in eine Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} c_1\, \hat{q}_1 \\ \hat{c}_l\, q_l \end{pmatrix} = \mathfrak{S}\, \mathfrak{F} \left[\mathfrak{x}'\, \hat{\mathfrak{U}} + \left(\mathfrak{G}' - \frac{1}{\lambda}\, \hat{\mathfrak{B}}' \right) \hat{\mathfrak{q}} \right]$$

überführen, die nach einer kleinen Umformung und mit der weiteren Setzung

$$\hat{\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} \hat{c}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{c}_l \end{pmatrix}$$

schließlich die Form

$$\left[\hat{\mathfrak{C}} + \mathfrak{S}\,\mathfrak{F}\left(\frac{1}{\lambda}\,\mathfrak{B}' - \mathfrak{G}'\right)\right]\hat{\mathfrak{q}} = \mathfrak{S}\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{X}'\,\hat{\mathfrak{U}} \tag{15b}$$

annimmt.

Die Mittelpunkte der ausgelenkten Lager des verformt umlaufenden Rotors beschreiben Kreisbahnen, die man sich von den als umlaufende Zeiger aufgefaßten Verformungsgrößen $\hat{\mathfrak{q}}_i$ erzeugt denken kann. Aus diesem Grunde erscheinen die Bewegungen der Lager in einer raumfesten Achsialebene als harmonische Schwingungsbewegungen (die im allgemein gegeneinander phasenverschoben sein werden), deren komplexe Amplituden nach Betrag und Phasenlage gemessen werden können. Da der somit als bekannt zu betrachtende Vektor $\hat{\mathfrak{q}}$ von der Ordnung l ($l < n$) ist, liegt der gleiche Sachverhalt vor, wie er bereits in Abschnitt **3** beschrieben wurde: Es sind zu wenig Gleichungen vorhanden. Die noch fehlenden Gleichungen lassen sich in der erwähnten Weise beschaffen, indem man den Rotor mehreren Meßläufen bei entsprechend auszuwählenden Drehzahlen unterwirft.

Die dem Verfahren zugrunde gelegte Isotropie der Lagerung wird in Wirklichkeit nicht erfüllt sein. Bei den üblichen technischen Anwendungen ist aber der dadurch bedingte Fehler meist verhältnismäßig klein, so daß die Ergebnisse nicht nennenswert beeinflußt werden dürften.

Abschließend sei nochmals ganz besonders darauf verwiesen, daß sich die in den Gleichungen dieses Abschnittes vorkommenden Eigenlösungen auf den zweifach gelagert gedachten Ersatzrotor beziehen. Obwohl in den meisten Fällen damit zu rechnen sein wird, daß die auszuwuchtenden Objekte ihrer Wichtigkeit entsprechend schon von der Konstruktion her einer schwingungstechnischen Berechnung (neuerdings meist mittels Rechenautomaten bis zu hohen Ordnungszahlen) unterzogen wurden, so ist dies für das vorstehend beschriebene Verfahren bedeutungslos, da diese Rechnung selbstverständlich für die wirklich vorhandene Lagerungsart und nicht für die hier ersatzweise gewählte zweifache Auflagerung durchgeführt worden sein wird. In der hier notwendig werdenden nochmaligen Durchrechnung liegt eine wesentliche Erschwernis des Verfahrens, so daß man es nur dann anwenden wird, wenn über das elastische Verhalten der Lagerkonstruktion von vornherein keine verbindlichen Aussagen gemacht werden können.

5. Experimentelle Lösung. Der nicht unbeträchtliche Aufwand an Berechnungsarbeit zur Bestimmung der Matrix $\mathfrak{L}$ [(11f) bzw. Abb. 2b] kann durch eine meßtechnische Analyse des auszuwuchtenden Gebildes umgangen werden, wenn man den dazu erforderlichen, ziemlich umfangreichen meßtechnischen Aufwand in Kauf zu nehmen bereit ist. Voraussetzung ist hierbei, daß es der konstruktive Aufbau des Meßobjektes gestattet, die erforderliche Anzahl von Tarierunwuchten in den gewählten Meßebenen anzubringen.

Das Verfahren eignet sich sowohl für starre als auch für nachgiebige Lagerung und sei hier für den Fall starrer Stützen kurz angedeutet. Mit dem als l-fach gelagert vorausgesetzten Rotor unternimmt man ε-Meßläufe bei den gemäß Abschnitt **3**c) auszuwählenden Drehzahlen. Dabei mißt man die l-Auflagerkräfte nach Betrag und Phase (bezogen auf eine rotorfeste Bezugsebene). Damit ist der Spaltenvektor $\hat{\mathfrak{A}}^*$ gemäß (11b) und (11e) bestimmt. Nun bringt man Tarierunwuchten in einigen der vorher festgelegten n-Meßebenen an, deren Spaltenvektor mit $\Delta_1\,\hat{\mathfrak{U}}$ bezeichnet sei, der für die in Abb. 4b beispielsweise gewählte Anordnung mit

$${}_{\Delta_1}\hat{\mathfrak{U}}_2 = r_2\,m_2\,e^{i\,\alpha_2}, \qquad {}_{\Delta_1}\hat{\mathfrak{U}}_4 = r_4\,m_4\,e^{i\,\alpha_4}, \qquad {}_{\Delta_1}\hat{\mathfrak{U}}_7 = r_7\,m_7\,e^{i\,\alpha_7}$$

und $i = \sqrt{-1}$ als imaginäre Einheit in transponierter Form durch

$${}_{\Delta_1}\hat{\mathfrak{U}} = (0\ {}_{\Delta_1}\hat{U}_2\ 0\ {}_{\Delta_1}\hat{U}_4\ 0\ 0\ {}_{\Delta_1}\hat{U}_7\ 0\ 0)$$

gegeben ist. Der mit diesen Tarierunwuchten besetzte Rotor wird nun wieder ε-Meßläufen bei den gleichen Drehzahlen wie vorher unterworfen. Die komplexen Amplituden der dabei gemessenen Auflagerkräfte faßt man zu einem neuen Spaltenvektor ${}_1\hat{\mathfrak{A}}^*$ gemäß (11e) zusammen. Da für beide Meßlaufgruppen Gl. (11g) gültig ist, läßt sich

$$\hat{\mathfrak{U}} = \mathfrak{L}^{-1}\,\hat{\mathfrak{A}}^*, \tag{16a}$$

$$\hat{\mathfrak{U}} + {}_{\Delta_1}\hat{\mathfrak{U}} = \mathfrak{L}^{-1}\,{}_1\hat{\mathfrak{A}}^* \tag{16b}$$

schreiben. Subtrahiert man diese Gleichungen, so ergibt sich, wenn

$$_{\Delta_i}\mathfrak{A}^* = {}_1\hat{\mathfrak{A}}^* - \hat{\mathfrak{A}}^*$$

gesetzt wird,

$$_{\Delta_i}\mathfrak{U} = \mathfrak{L}^{-1}\,{}_{\Delta_i}\hat{\mathfrak{A}}^* .$$

Der beschriebene Vorgang wird insgesamt n-mal mit abgeänderten Unwuchten $\Delta_i U_i$, die jeweils so anzuordnen sind, daß sich die den einzelnen Meßlaufgruppen zugeordneten Vektoren $_i\hat{\mathfrak{A}}^*$ in ihren Elementen möglichst stark voneinander unterscheiden (zur Gewährleistung der linearen Unabhängigkeit eines zu (11g) analog aufzubauenden Gleichungssystems), wiederholt. Die so erlangten n-Gleichungen

$$_{\Delta_t}\hat{\mathfrak{U}} = \mathfrak{L}^{-1}\,{}_{\Delta_t}\hat{\mathfrak{A}}^* \qquad (t = 1, 2, \ldots n)$$

können mit den beiden (n, n)-Matrizen

$$_{\Delta}\hat{\mathfrak{U}} = (_{\Delta_1}\hat{\mathfrak{U}}\ {}_{\Delta_2}\hat{\mathfrak{U}} \ldots {}_{\Delta_n}\hat{\mathfrak{U}}),$$

$$_{\Delta}\hat{\mathfrak{A}}^* = (_{\Delta_1}\hat{\mathfrak{A}}^*\ {}_{\Delta_2}\hat{\mathfrak{A}}^* \ldots {}_{\Delta_n}\hat{\mathfrak{A}}^*)$$

zu einer einzigen Matrizengleichung zusammengezogen werden, aus der sich die gesuchte Matrix $\mathfrak{L}^{-1}$ zu

$$\mathfrak{L}^{-1} = {}_{\Delta}\hat{\mathfrak{U}}\,(_{\Delta}\hat{\mathfrak{A}}^*)^{-1} \tag{16c}$$

bestimmen läßt, und womit dann die gesuchte Unwuchtverteilung mit Hilfe der Gleichung (16a) berechnet werden kann. Man wird, um den Aufwand an Berechnungsarbeit klein zu halten, bedacht sein müssen, mit einer möglichst kleinen Zahl von Tarierunwuchten — im Extremfall eine je Meßlaufgruppe — auszukommen.

Bei diesem Verfahren erlangt man durch systematisches „Befragen" Einblick in den strukturellen Aufbau des Meßobjektes, wie dies in grundsätzlich gleicher Weise beim Auswuchten starrer Rotoren üblicherweise durchgeführt wird. Dieser Vorgang ist, wie man sich leicht überzeugen kann, als Sonderfall in der allgemeinen Lösung gemäß (11d) vorhanden, wenn man beachtet, daß ein in einer Ebene frei-freies stabförmiges Gebilde den zweifach zu zählenden Eigenwert null mit den Eigenfunktionen $y(z) = 1$ bzw. $y(z) = (z - z_0)/z_0$, mit z_0 als Schwerpunktsabszisse des Gebildes, besitzt.

6. Dimensionsbetrachtung. Bei der numerischen Behandlung der Lösungsgleichungen geht man zweckmäßigerweise auf dimensionslose Beziehungen über. Setzt man die Eigenfunktionen $'y(z)$ wie allgemein üblich dimensionslos an, so erhalten die Elemente von $'\mathfrak{S}$ als die den Eigenformen zugeordneten Auflagerkräfte $'S_i$ die Dimension einer Kraft je Längeneinheit, während die Elemente von $'\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ dimensionsfrei bleiben.

Mit den für die Kräfte, Massen und Längen passend zu wählenden Bezugsgrößen P_0 bzw. M_0 bzw. l_0 und den Setzungen

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= (1/l_0)\, z\,, & \overline{M}_j &= (1/M_0)\, M_j\,,\\
\overline{W}_i &= (1/l_0)\, W_i\,, & \bar{e}_j &= (1/l_0)\, \hat{e}_j\,,\\
\bar{\varrho}(z) &= (l_0/M_0)\, \varrho(z)\,, & \bar{u}_i &\equiv \overline{W}_i\, \bar{\varrho}(\bar{z}_i)\, e(z_i) + \overline{M}_i\, \bar{e}_i = (1/M_0\, l_0)\, \hat{u}_i\,,\\
\bar{e}(z) &= (1/l_0)\, \hat{e}(z)\,, & \bar{\mu}_r &\equiv \int {}'y^2(z)\, \bar{\varrho}(z)\, d\bar{z} = (1/M_0)\, \mu_r\,,
\end{aligned}$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{A}} &= (1/P_0)\, \hat{\mathfrak{A}}\,, & \overline{\mathfrak{F}} &= M_0\, \mathfrak{F}\,,\\
\overline{\mathfrak{S}} &= (l_0/P_0)\, \mathfrak{S}\,, & \overline{\mathfrak{U}} &= (1/M_0\, l_0)\, \hat{\mathfrak{U}}
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

läßt sich die Lösungsgleichung (11d) unmittelbar in die dimensionslose Beziehung

$$\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{S}}\,\overline{\mathfrak{F}}\,\mathfrak{X}'\,\overline{\mathfrak{U}}$$

überführen. Damit wird aber auch die in (11f) vorkommende Produktmatrix, sie werde mit $\overline{\mathfrak{L}}$ bezeichnet, dimensionsfrei, so daß sich mit der Festlegung

$$\overline{\mathfrak{A}}^{*} = (1/P_0)\,\mathfrak{A}^{*}$$

die endgültige Lösung

$$\overline{\mathfrak{U}} = (\overline{\mathfrak{L}})^{-1}\,\overline{\mathfrak{A}}^{*}$$

ergibt. Auf die gleiche Weise gelangt man mit

$$\overline{\mathfrak{U}}_T^{*} = (1/M_0\,l_0)\,\hat{\mathfrak{U}}_T^{*}$$

zu

$$\overline{\mathfrak{U}}_T^{*} = -\,(\mathfrak{X}_T^{*\prime})^{-1}\,\mathfrak{X}^{*\prime}\,(\overline{\mathfrak{L}})^{-1}\,\overline{\mathfrak{A}}^{*}$$

[siehe (12d)]. Schließlich erhält man mit den weiteren Setzungen

$$\bar{\mathfrak{q}} = (1/l_0)\,\hat{\mathfrak{q}}\,, \qquad \overline{\mathfrak{C}} = (l_0/P_0)\,\hat{\mathfrak{C}}\,,$$
$$\overline{\mathfrak{G}} = (1/M_0)\,\mathfrak{G}\,, \qquad \bar{\lambda} = (M_0\,l_0/P_0)\,\lambda\,,$$
$$\overline{\mathfrak{B}} = (l_0/P_0)\,\hat{\mathfrak{B}}\,,$$

und den Gleichungen (17) die letzte Lösungsgleichung dimensionsfrei:

$$\left[\overline{\mathfrak{C}} + \overline{\mathfrak{S}}\,\overline{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\,\overline{\mathfrak{B}} - \overline{\mathfrak{G}}\right)\right]\bar{\mathfrak{q}} = \overline{\mathfrak{S}}\,\overline{\mathfrak{F}}\,\mathfrak{X}'\,\overline{\mathfrak{U}}\,.$$

(Eingegangen am 12. September 1960.)

Anschrift des Verfassers: Privatdozent Dr. *Erhard Hübner*, Aachen, Im Brockenfeld 17.

Berechnung der Strömung des instationären vielstufigen Plattengitters

Von Ernst-Günther Feindt

1. Einleitung. In vielstufigen Axialverdichtern sowie in vielstufigen Gas- und Dampfturbinen sind sehr viele Schaufelreihen unmittelbar hintereinander angeordnet, wobei oftmals sämtliche Schaufeln, Leit- und Laufschaufeln, dasselbe Profil besitzen. Für den Konstrukteur ist es wichtig zu wissen, wie sich die Geschwindigkeitsverteilung der Schaufel einer mittleren Stufe unterscheidet von der Geschwindigkeitsverteilung, die dieselbe Schaufel als Einzelprofil oder als Schaufel eines Einzelgitters besitzt. Im folgenden wird dieser Vergleich durchgeführt am ungestaffelten Plattengitter, weil dieses mit einfachen mathematischen Mitteln exakt berechnet werden kann.

In der Praxis steht das Leitrad still, und das Laufrad bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $2\,U$ in Umfangsrichtung. Das strömende Medium rotiert dann im Mittel in der ganzen Maschine mit einer Umfangsgeschwindigkeit U, so daß Laufrad und Leitrad eine entgegengesetzt gleiche Umfangsgeschwindigkeit U bzw. $-U$ relativ zum Medium haben. Für die Rechnung ist es anschaulicher von der Vorstellung auszugehen, daß das strömende Medium im Mittel keine Umfangsgeschwindigkeit besitzt, und sich dafür Leit- und Laufrad mit der Umfangsgeschwindigkeit $-U$ bzw. $+U$ bewegen. Die Durchströmung des vielstufigen (genauer: unendlich vielstufigen) Plattengitters wird im folgenden berechnet als Überlagerung einer Verdrängungsströmung mit einer Zirkulationsströmung und einer Parallelströmung parallel zur ξ-Achse. Die Parallelströmung wird allerdings im folgenden als trivial nicht weiter beachtet. Die Strömung wird als inkompressibel und wirbelfrei vorausgesetzt.

2. Vorbemerkungen zur konformen Abbildung. Die Berechnung der Strömung des vielstufigen Plattengitters geschieht in der Weise, daß ein Periodenrechteck der ζ-Ebene (Abb. 1, 2 und 5) auf eine volle $\varkappa$-Ebene (Abb. 3 und 6) konform abgebildet wird. In der $\varkappa$-Ebene erscheint nur je eine Platte des Gitters a und des Gitters b. Die $\varkappa$-Ebene wird dann weiter abgebildet auf ein Rechteck der z-Ebene (Abb. 4 und 7). In der z-Ebene kann die Strömung ohne Schwierigkeit ermittelt werden. Die ganze Rechnung muß für die Verdrängungsströmung (Index q) und die Zirkulationsströmung (Index Γ) getrennt durchgeführt werden. Dies liegt daran, daß sich dann in der

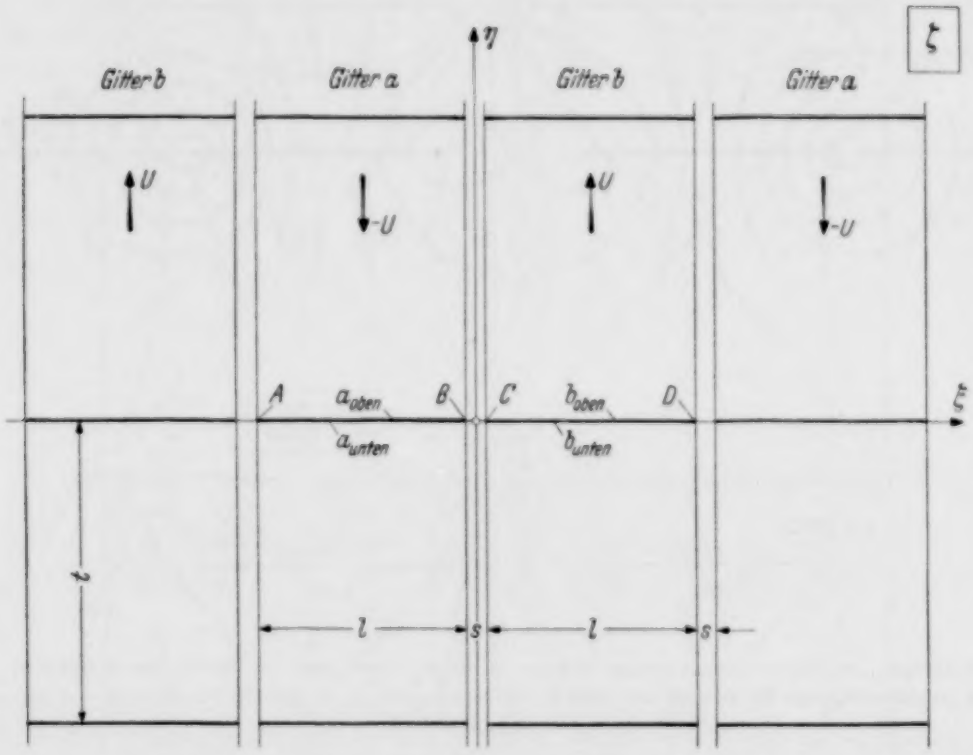


Abb. 1. Das unendlich vielstufige Plattengitter. Es sind nur vier der unendlich vielen Plattenreihen gezeichnet. Für das Zahlenbeispiel ist $t = 1$, $l = 0{,}70711$, $s = 0{,}13435$. Gitter a: $U = -1$ (bzw. 0); Gitter b: $U = 1$ (bzw. 2).

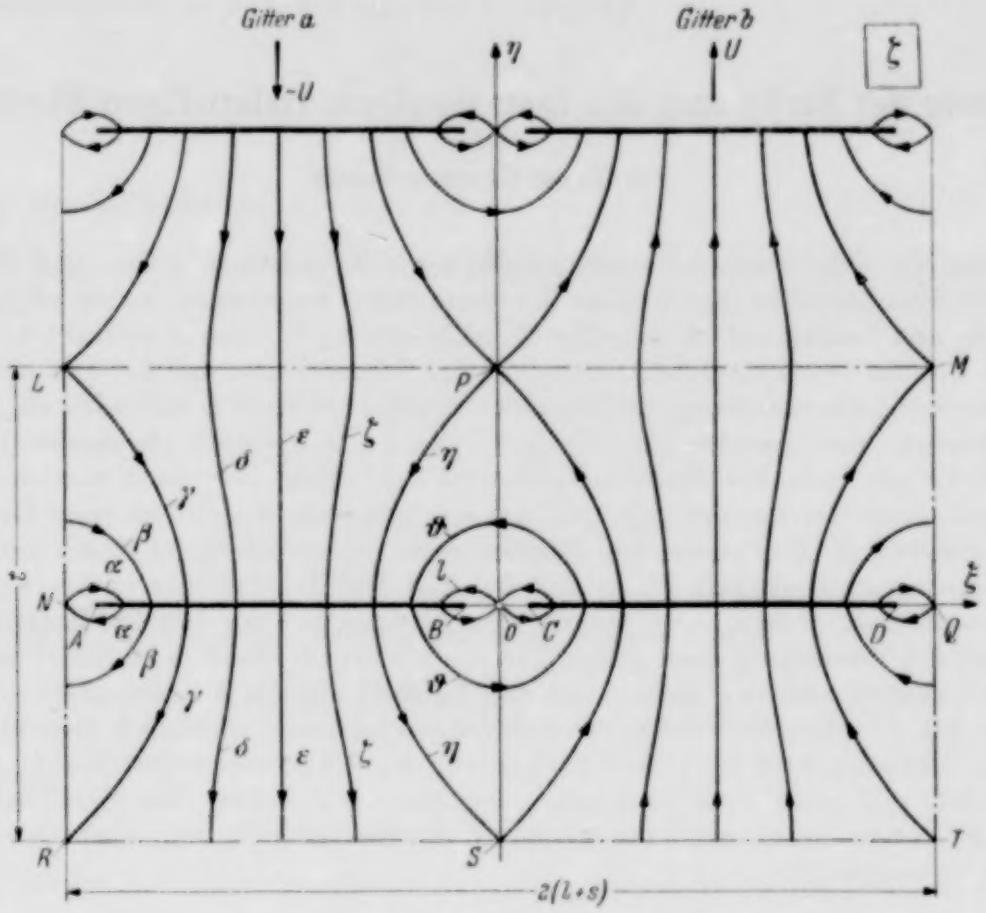


Abb. 2. Skizze der Verdrängungsströmung. *LMTR* ist das Periodenrechteck, das konform abgebildet wird auf die volle $\varkappa_q$-Ebene.

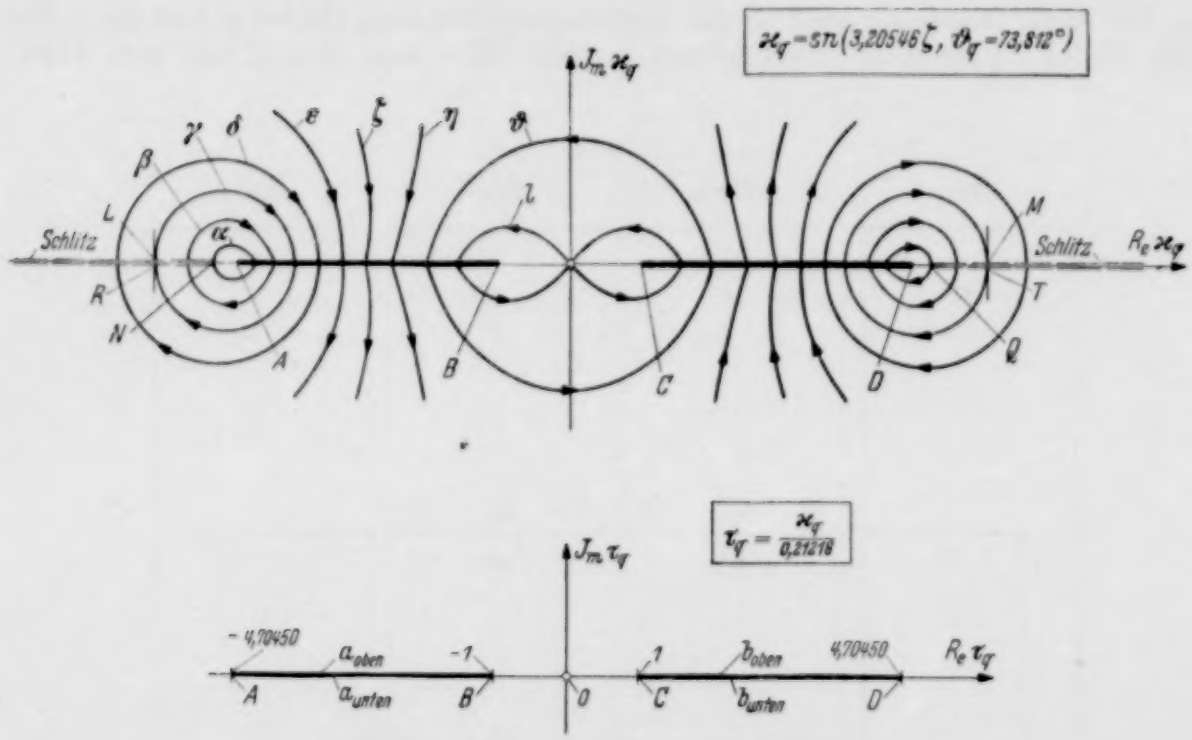


Abb. 3. Zwischenabbildungen der Verdrängungsströmung Abb. 2. In die $\varkappa_q$-Ebene sind die Stromlinien einskizziert. DieStromlinien a bis *l* entsprechen den gleichbezeichneten Stromlinien von Abb. 2. $\varkappa_T = -\varkappa_R = 1/k_q = 1{,}04129$, $\varkappa_Q = -\varkappa_N = 1$, $\varkappa_D = -\varkappa_A = 0{,}99820$, $\varkappa_C = -\varkappa_B = 0{,}21218$.

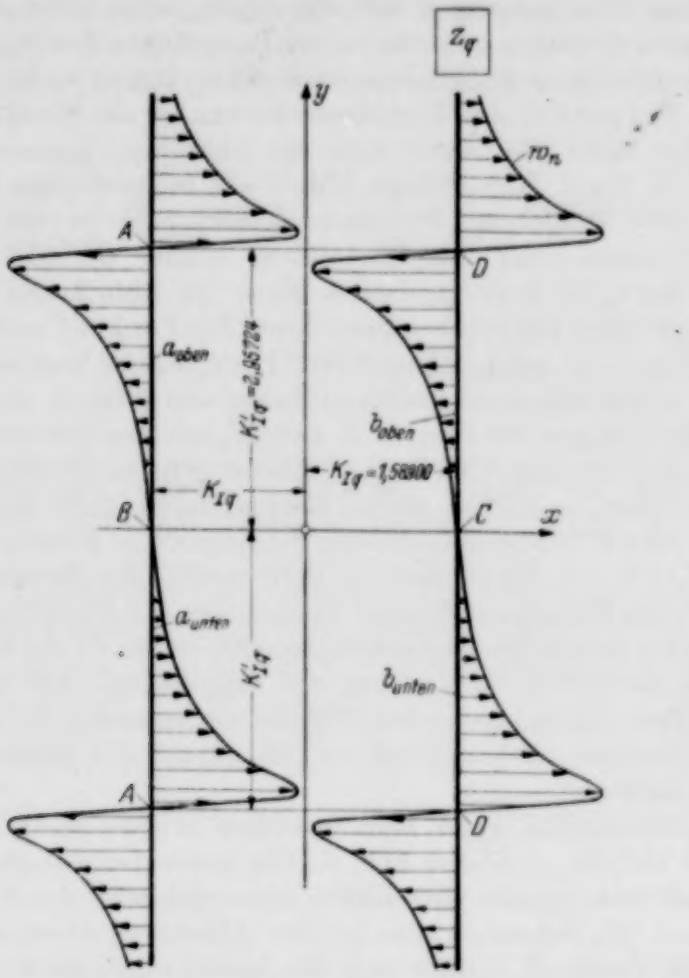


Abb. 4. Bildebene der Verdrängungsströmung. Die eingezeichnete Verteilung der Normalkomponente w_n der Geschwindigkeit ist positiv, wenn sie ins Innere des Rechtecks weist.

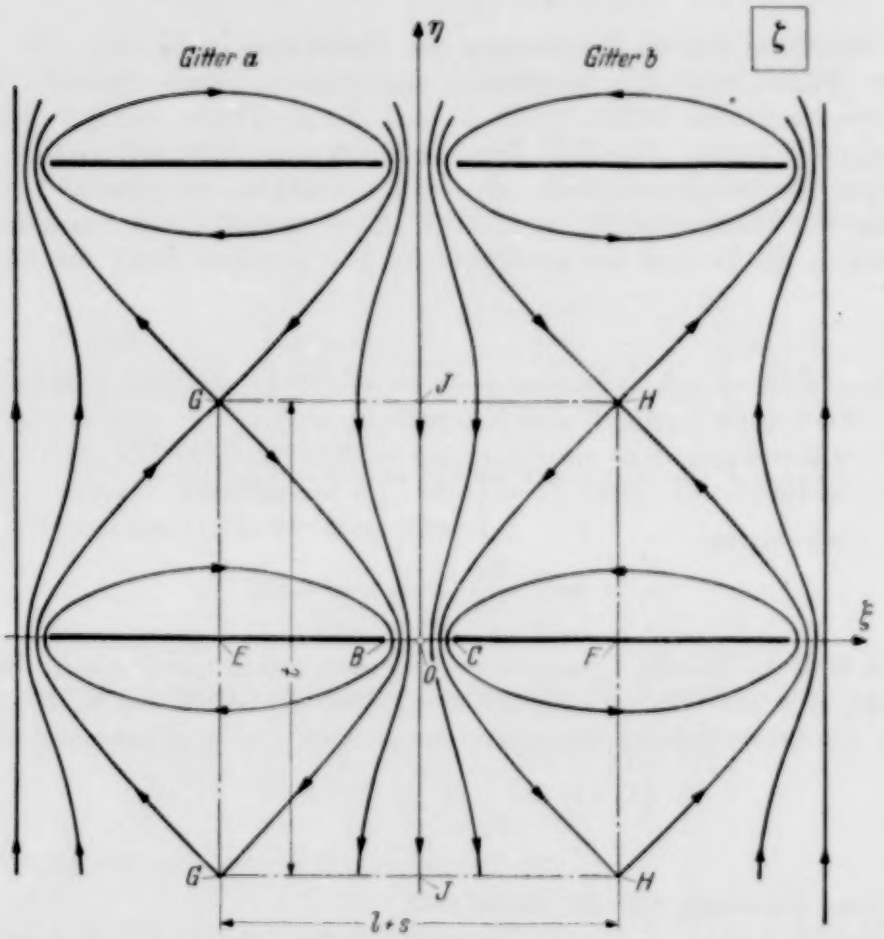


Abb. 5. Skizze der Zirkulationsströmung. *GHHG* ist das Periodenrechteck, das konform abgebildet wird auf die volle $\varkappa_I$-Ebene.

ganzen $\varkappa_q$- bzw. $\varkappa_\Gamma$-Ebene eine reguläre Strömung ergibt, wenn die Ecken G und H bzw. L, M, T und R des abzubildenden Periodenrechtecks in die Staupunkte der Strömung gelegt werden. Die Abbildung ist in den Eckpunkten des Periodenrechtecks nämlich nicht konform. Dieser Umstand stört nicht, wenn die Eckpunkte des Periodenrechtecks in die Staupunkte der Strömung gelegt werden. Man sieht dies leicht ein, wenn man die Abbildung genauer betrachtet. Für die Abbildung der ζ-Ebene Abb. 2 auf die $\varkappa_q$-Ebene Abb. 3 gilt beispielsweise folgendes:

Die obere Hälfte *ONLPMQO* des Periodenrechtecks geht in die obere Hälfte Im $\{\varkappa_q\} > 0$ der $\varkappa_q$-Ebene über. Entsprechend geht die untere Hälfte *ONRSTQO* des Periodenrechtecks in die untere Hälfte Im $\{\varkappa_q\} < 0$ der $\varkappa_q$-Ebene über. In Abb. 2 und Abb. 3 sind einander entsprechende Punkte mit gleichen Buchstaben bezeichnet. Die Punkte P und S der ζ-Ebene gehen in den unendlich fernen Punkt $\varkappa_q = \infty$ der $\varkappa_q$-Ebene über. Die $\varkappa_q$-Ebene muß man sich längs der negativen x-Achse von N bis $-\infty$ und längs der positiven Achse von Q bis $+\infty$ aufgeschlitzt denken. Auf den oberen Schlitzrändern liegen die Punkte L und M, auf den unteren Schlitzrändern liegen die Punkte R und T. Der Streckenzug *ONLP* der ζ-Ebene geht in die Strecke *ON* sowie den oberen Schlitzrand NL $-\infty$ der $\varkappa_q$-Ebene über. Entsprechend geht der Streckenzug *ONRS* der ζ-Ebene über in die Strecke $O\,N$ und den unteren Schlitzrand $N\,R$ $-\infty$ der $\varkappa_q$-Ebene. Die rechten Winkel $\sphericalangle$ *ONL*, $\sphericalangle$ *ONR*, $\sphericalangle$ *OQM* und $\sphericalangle$ *OQT* sowie die Innenwinkel $\sphericalangle$ *NLP*, $\sphericalangle$ *NRS*, $\sphericalangle$ *QTS* und $\sphericalangle$ *QMP* des Periodenrechtecks werden bei der Abbildung gestreckt von $\pi/2$ auf π, und die Winkel $\pi/4$, unter denen die Staupunktstromlinien bei L, N, R, M, Q und T auf die vertikalen Rechteckseiten auftreffen, werden auf $\pi/2$ aufgebogen. Aus diesen Überlegungen folgt, daß die innerhalb des Periodenrechtecks der ζ-Ebene verlaufenden Stromlinien bei der Abbildung auf die $\varkappa_q$-Ebene so deformiert werden, daß sie sich gemäß der Skizze Abb. 3 längs der Schlitzränder ohne Knick schließen.

Entsprechende Betrachtungen kann man anstellen für die konforme Abbildung der Zirkulationsströmung Abb. 5 auf die $\varkappa_\Gamma$-Ebene Abb. 6. Ein neuer Gesichtspunkt ergibt sich bei dieser Abbildung dadurch, daß nur jeweils eine Hälfte einer Schaufel des Gitters *a* und des Gitters *b* konform abgebildet wird, die Schaufeln also bei der Abbildung zerschnitten werden. In der Umgebung der Schnittstelle Punkt E verhält sich die Abbildungsfunktion[1] wie die Funktion $\varkappa_\Gamma + 1 = (\zeta - \zeta_E)^2 \cdot$ konst. Entsprechendes gilt für die Umgebung von Punkt F. Als Endergebnis dieser Überlegungen findet man, daß durch die konforme Abbildung die Zirkulationsströmung des vielstufigen Gitters übergeht in die Zirkulationsströmung um zwei einzelne Platten.

3. Konforme Abbildung für die Berechnung der Zirkulationsströmung. Für das Zahlenbeispiel wurden die in der Bildunterschrift von Abb. 1 angegebenen Werte gewählt. Die konforme Abbildung des Periodenrechtecks *GHHG* (Abb. 5) auf die $\varkappa_\Gamma$-Ebene erfolgt* mit Hilfe des elliptischen Normalintegrals erster Gattung bzw. mit dessen Umkehrfunktion, der *Jacobi*schen sn-Funktion. Dem Rechteckverhältnis $(l + s)/t = 0{,}84146$ entspricht** das Modulquadrat $k_\Gamma^2 = 0{,}31805$ sowie die Halbseiten $K_\Gamma = 1{,}72461$, $K'_\Gamma = 2{,}04955$ des Normalrechtecks. Der Zusammenhang zwischen der ζ- und der $\varkappa_\Gamma$-Ebene ist also gegeben durch die Gleichung

$$\zeta = \frac{l+s}{2\,K_\Gamma} \int_0^{\varkappa_\Gamma} \frac{d\varkappa_\Gamma}{\sqrt{(1-\varkappa_\Gamma^2)\,(1-k_\Gamma^2\,\varkappa_\Gamma^2)}} = \frac{l+s}{2\,K_\Gamma} \int_0^{\varphi_\Gamma} \frac{d\,\varphi_\Gamma}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta_\Gamma \sin^2\varphi_\Gamma}}$$

$$= \frac{l+s}{2\,K_\Gamma}\,F\,(\varphi_\Gamma,\ \vartheta_\Gamma = \operatorname{arc\,sin}\, k_\Gamma) = \frac{F(\varphi_\Gamma,\ \vartheta_\Gamma = 34{,}332°)}{4{,}09909} \tag{1}$$

bzw. durch deren Umkehrung

$$\varkappa_\Gamma = \operatorname{sn}\left(\frac{2\,K_\Gamma}{l+s}\,\zeta,\ \ \vartheta_\Gamma = 34.332°\right). \tag{2}$$

Diese Beziehungen sind in Tabelle 1 ausgewertet worden durch quadratische Interpolation in den Tafeln von *Hayashi*. Für die Plattenendpunkte ergeben sich die Werte 0,27083, $-0{,}27083$, 1 und -1 (Abb. 6). Im nächsten Schritt der Berechnung wird die $\varkappa_\Gamma$-Ebene mit Hilfe der Gleichung ($\varkappa_{\Gamma C} = 0{,}27083$)

$$\tau_\Gamma = \frac{1}{\varkappa_{\Gamma C}}\,\varkappa_\Gamma \tag{3}$$

[1] *A. Betz*, Konforme Abbildung, Ziff. 42. Berlin 1948.
* *A. Betz*, a. a. O., Ziff. 63.
** Vgl. *A. Betz*, a. a. O., Abb. 203, oder *K. Hayashi*, Fünfstellige Funktionentafeln, Tafel XXX, Berlin 1930.

so auf eine $\tau_{I'}$-Ebene abgebildet, daß die inneren Plattenendpunkte B und C in $\tau_{I'} = \pm 1$ fallen. Für die äußeren Plattenpunkte F und E ergibt sich $\tau_{I'} = \pm 3{,}69237$. Die anschließende Abbildung auf das Rechteck der $z_{I'}$-Ebene (Abb. 7) erfolgt wieder mit Hilfe eines elliptischen Normalintegrals erster Gattung*

$$y_{I'} = \int_1^{\tau_{I'}} \frac{d\tau_{I'}}{\sqrt{(1-\tau_{I'}^2)\,(1-k_{1I'}^2\,\tau_{I'}^2)}} = \int_0^{\beta} \frac{d\beta}{\sqrt{1-k_{1I'}^2 \cdot \sin^2\beta}} = F(\beta,\, \vartheta'_{1I'} = 74{,}293^\circ)\,. \tag{4}$$

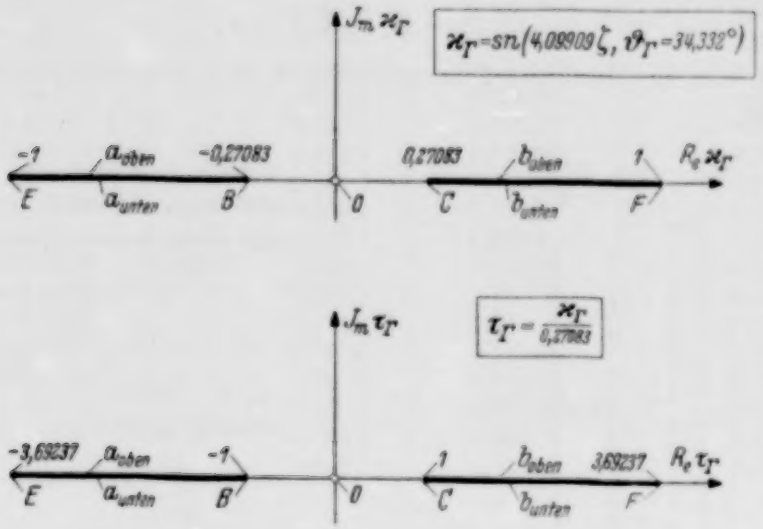


Abb. 6. Zwischenabbildungen der Zirkulationsströmung Abb. 5.

Der Modul $k_{1I'}$, der Komodul $k'_{1I'}$ sowie die Größe $\vartheta'_{1I'}$ werden berechnet aus den Gleichungen

$$k_{1I'} = \frac{1}{\tau_{I'F}} = \frac{1}{3{,}69237} = 0{,}27083\,,$$

$$k'_{1I'} = \sqrt{1-k_{1I'}^2} = 0{,}96263\,,$$

$$\vartheta'_{1I'} = \arcsin k'_{1I'} = 74{,}293^\circ\,.$$

Gemäß *Betz*** besteht zwischen $\sin\beta$ (von *Betz* mit τ_2 bezeichnet) und $\tau_{I'}$ die Beziehung

$$\tau_{I'} = \sqrt{\frac{1}{1-k_{1I'}^2 \cdot \sin^2\beta}}\,. \tag{5}$$

Durch (4) und (5) ist die Zuordnung der Schaufelkonturpunkte der $\tau_{I'}$- und $z_{I'}$-Ebenen hergestellt. Gleichung (4) und (5) sind in den ersten sechs Spalten von Tabelle 2 ausgewertet. Die halbe Breite $K_{1I'}$ und die halbe Höhe $K'_{1I'}$ des Rechtecks der $z_{I'}$-Ebene sind gegeben durch die vollständigen Normalintegrale $K_{1I'}(k_{1I'}) = 1{,}60085$ und $K'_{1I'}(k_{1I'}) = 2{,}72482$. Der Abbildungsmaßstab zwischen der ζ- und der $z_{I'}$-Ebene kann nach der Kettenregel

$$\frac{d\xi}{dy_{I'}} = \frac{d\xi}{d\varkappa_{I'}}\,\frac{d\varkappa_{I'}}{d\tau_{I'}}\,\frac{d\tau_{I'}}{dy_{I'}} \tag{6}$$

leicht aus (1), (3) und (4) ermittelt werden. Es ergibt sich die Formel

$$\left|\frac{d\xi}{dy_{I'}}\right| = \varkappa_{I'C}\,\frac{l+s}{2\,K_{I'}}\left|\sqrt{\frac{(1-\tau_{I'}^2)\,(1-k_{1I'}^2\cdot\tau_{I'}^2)}{(1-\varkappa_{I'}^2)\,(1-k_{1I'}^2\,\varkappa_{I'}^2)}}\right|, \tag{7}$$

die in der vorletzten Spalte von Tabelle 2 ausgewertet ist.

* Vgl. *A. Betz*, a. a. O., S. 232, Absatz 2 und Gleichung (63, 37).
** A. a. O., Gleichung (63, 38).

4. Berechnung der Zirkulationsströmung. Die Strömung der τ_Γ-Ebene ist eine Zirkulationsströmung um zwei einzelne Platten. Die Zirkulationen der beiden Platten sind entgegengesetzt gleich groß. Gemäß *Betz** entspricht dieser Strömung in der z_Γ-Ebene die in Abb. 7 dargestellte vertikale Parallelströmung $\overline{w} = i\,c$. Die gesuchte Geschwindigkeitsverteilung der Platten der ζ-Ebene ist also

$$w_{1\Gamma} = c\,\frac{dy_\Gamma}{d\xi}\,. \tag{8}$$

Berücksichtigt man, daß nur die halben Schaufeln der ζ-Ebene auf die z_Γ-Ebene abgebildet wurden, so erhält man für die Schaufelzirkulation Γ die Gleichung

$$\Gamma_b = -\,\Gamma_a = 4\,K'_{1\Gamma}\,c\,. \tag{9}$$

Gleichung (8) ist mit dem in Abschnitt 7 berechneten Wert $c = 0{,}11107$ in der letzten Spalte der Tabelle 2 ausgewertet.

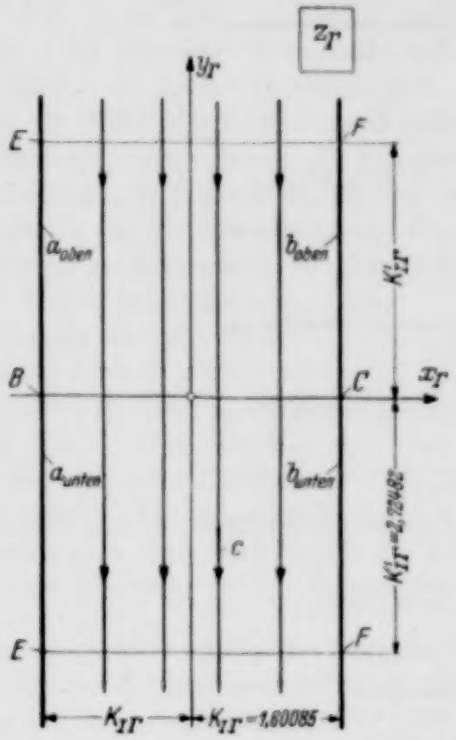


Abb. 7. Bildebene der Zirkulationsströmung. Die Zirkulationsströmung von Abb. 5 erscheint in der z_Γ-Ebene als Parallelströmung mit dem Geschwindigkeitsbetrag $|c|$.

Tabelle 1. *Berechnung der Zirkulationsströmung. Auswertung der Gleichung* (1)

φ_Γ	ζ
	Gl. (1)
$\varphi_\Gamma = \arcsin \varkappa_\Gamma$ willkürlich gewählt	$\frac{F(\varphi_\Gamma,\ \vartheta_\Gamma = 34{,}332°)}{4{,}09909}$ nach *Hayashi* Tab. XXVII
0°	0
10°	0,04265
20°	0,08570
30°	0,12956
40°	0,17458
50°	0,22103
55°	0,24483
60°	0,26905
65°	0,29365
70°	0,31860
75°	0,34387
80°	0,36938
82°	0,37965
84°	0,38993
86°	0,40023
88°	0,41055
90°	0,42087

5. Konforme Abbildung für die Berechnung der Verdrängungsströmung. Die konforme Abbildung der Verdrängungsströmung unterscheidet sich von der konformen Abbildung der Zirkulationsströmung nur dadurch, daß ein etwas anderes Periodenrechteck der ζ-Ebene abgebildet wird, und zwar ist das Rechteckverhältnis gemäß Abb. 2 gleich $2\,(l+s)/t = 1{,}68292$. Nach *Hayashis* Tabelle XXX gehört hierzu $k_q = 0{,}96035$, $\vartheta_q = \arcsin k_q = 73{,}812°$, $K_q = 2{,}69727$, $K'_q = 1{,}60273$. Damit erhält man als erste Abbildungsfunktion

$$\zeta = \frac{l+s}{K_q}\int_0^{\varkappa_q} \frac{d\varkappa_q}{\sqrt{(1-\varkappa_q^2)\,(1-k_q^2\,\varkappa_q^2)}} = \frac{l+s}{K_q}\,F(\varphi_q,\ \vartheta_q = 73{,}812°) \tag{10}$$

oder als Umkehrfunktion geschrieben

$$\varkappa_q = \mathrm{sn}\left(\frac{K_q}{l+s}\,\zeta,\ \vartheta_q = 73{,}812°\right). \tag{11}$$

Für die anschließenden Abbildungen der $\varkappa_q$-Ebene auf die τ_q-Ebene ergibt sich ($\varkappa_{qC} = 0{,}21218$)

$$\tau_q = \frac{1}{\varkappa_{qC}}\,\varkappa_q\,, \tag{12}$$

* A. a. O., S. 245.

Tabelle 2. *Berechnung der Zirkulationsströmung*

β	τ_Γ	$\varkappa_\Gamma$	ϑ_Γ	ζ	y_Γ	$\lvert d\xi/dy_\Gamma\rvert$	$w_{t\,\Gamma}$
	Gl. (5)	Gl. (3)			Gl. (4)	Gl. (7)	Gl. (8)
will-kürlich gewählt	$\sqrt{\frac{1}{1-k_{I\Gamma}'^2\sin^2\beta}}$	$0{,}27083\,\tau_\Gamma$	$\arcsin\varkappa_\Gamma$	interpoliert in Tabelle I	$F(\beta,\vartheta'_{I\Gamma}=74{,}293^\circ)$ nach *Hayashi* Tab. XXVII	$0{,}06607\cdot\left\lvert\sqrt{\frac{(1-\tau_\Gamma^2)(1-k_{I\Gamma}^2\tau_\Gamma^2)}{(1-\varkappa_\Gamma^2)(1-k_{I\Gamma}^2\varkappa_\Gamma^2)}}\right\rvert$	$\frac{0{,}11107}{d\xi/dy_\Gamma}$
0°	1	0,27083	15,713°	0,0672	0	0	∞
10°	1,01426	0,27469	15,944°	0,0676	0,17535	0,01133	9,8032
20°	1,05904	0,28682	16,668°	0,0708	0,35581	0,02334	4,7588
30°	1,14084	0,30897	17,997°	0,0768	0,54859	0,03684	3,0149
40°	1,27294	0,34475	20,167°	0,0860	0,75690	0,05305	2,0937
50°	1,48052	0,40097	23,639°	0,1012	0,99577	0,07405	1,4999
55°	1,62605	0,44038	26,128°	0,1124	1,13104	0,08745	1,2701
60°	1,81072	0,49040	29,367°	0,1268	1,28063	0,10378	1,0702
65°	2,04611	0,55415	33,653°	0,1460	1,43130	0,12416	0,8946
70°	2,34564	0,63527	39,441°	0,1723	1,63966	0,15015	0,7397
76°	2,79968	0,75824	49,310°	0,2180	1,90860	0,19113	0,5811
78°	2,96957	0,80425	53,540°	0,2382	2,00958	0,20683	0,5370
80°	3,14208	0,85195	58,428°	0,2638	2,11670	0,22432	0,4951
82°	3,30904	0,89619	63,669°	0,2872	2,22995	0,24158	0,4598
84°	3,46106	0,93736	69,624°	0,3170	2,34903	0,25790	0,4307
86°	3,58356	0,97054	76,059°	0,3488	2,47314	0,27167	0,4088
88°	3,66420	0,99238	82,925°	0,3844	2,60101	0,28017	0,3964
90°	3,69232	1	90°	0,4207	2,72482	0,28437	0,3906

und die Abbildung der $\varkappa_q$-Ebene auf die z_q-Ebene folgt aus den Gleichungen (β ist Parameter)

$$\left.\begin{aligned} y_q &= \int_1^{\tau_q} \frac{d_\tau}{\sqrt{(1-\tau_q^2)\,(1-k_{I\,q}^2\,\tau_q^2)}} = F(\beta,\vartheta'_{I\,q}=77{,}732^\circ)\,, \\ \tau_q &= \sqrt{\frac{1}{1-k_{I\,q}'^2\sin^2\beta}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Wie in Abschnitt 3 erhält man den Modul $k_{I\,q}$ aus der Lage des Plattenendpunktes $\tau_{q\,D}$. Es ist $k_{I\,q}=1/4{,}70450=0{,}21256$. Damit ergibt sich $k'_{I\,q}=0{,}97715$, $\vartheta'_{I\,q}=\arcsin k'_{I\,q}=77{,}732^\circ$, $K_{I\,q}=1{,}58900$, $K'_{I\,q}=2{,}95724$. Der Abbildungsmaßstab $d\xi/dy_q$ zwischen der ζ- und der z_q-Ebene wird wie in Abschnitt 3 berechnet:

$$\left|\frac{d\xi}{dy_q}\right| = \varkappa_{q\,C}\,\frac{l+s}{K_q}\left|\sqrt{\frac{(1-\tau_q^2)\,(1-k_{I\,q}^2\,\tau_q^2)}{(1-\varkappa_q^2)\,(1-k_q^2\,\varkappa_q^2)}}\right|. \tag{14}$$

Die Abbildungsgleichungen (10) bis (14) werden zweckmäßig nach demselben Schema ausgewertet (Tabelle 1 und 2) wie die entsprechenden Gleichungen der Zirkulationsströmung.

6. Berechnung der Verdrängungsströmung. In der ζ-Ebene sind die Geschwindigkeitskomponenten normal zu den Schaufeloberflächen gleich U. In der z_q-Ebene ist daher die schaufelnormale Geschwindigkeitskomponente $w_n(z_q)$

$$w_n(z_q) = \frac{d\xi}{dy_q}\,U\,. \tag{15}$$

Um diese Grenzbedingung in der z_q-Ebene zu erfüllen, werden die Rechteckseiten AA und DD mit Quellbelegungen $q=2\,w_n(z_q)$ versehen (Abb. 4) und das Rechteck $ADDA$ durch Spiegeln an den vertikalen Rechteckseiten AA und DD sowie periodisches Fortsetzen über die Seiten AD auf die volle z_q-Ebene ergänzt[1]. Die Tangentialgeschwindigkeit, die von diesen Quellbelegungen induziert wird, ergibt sich aus der Gleichung

$$w_i(z_q) = \frac{1}{\pi}\int_{-K'_{I\,q}}^{K'_{I\,q}} w_n(z_q)\left[\frac{\vartheta'_1\left(\frac{i(y_q-y'_q)}{4\,K_{I\,q}}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{i(y_q-y'_q)}{4\,K_{I\,q}}\right)} - \frac{\vartheta'_2\left(\frac{i(y_q-y'_q)}{4\,K_{I\,q}}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{i(y_q-y'_q)}{4\,K_{I\,q}}\right)}\right] dy'_q \tag{16}$$

[1] *E.-G. Feindt*, Ing.-Arch. 30 (1961), S. 88—95.

mit $w_n(z_q)$ nach (14) und (15). Die gesuchte Tangentialgeschwindigkeit in der ζ-Ebene ist dann

$$w_t(\zeta) = w_t(z_q)\,\frac{dy_q}{d\xi}\,. \tag{17}$$

Die ϑ-Funktionen werden zweckmäßig aus den ersten beiden Gliedern ihrer Reihenentwicklung berechnet. Durch Zerlegen in Real- und Imaginärteil ergibt sich*

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\vartheta_1'\left(\frac{i(y_q-y_q')}{4K_{Iq}}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{i(y_q-y_q')}{4K_{Iq}}\right)} &= -i\,\frac{\pi}{4K_{Iq}}\,\frac{\mathfrak{Cof}\frac{\pi(y_q-y_q')}{4K_{Iq}} - 3h_I^2\,\mathfrak{Cof}\frac{3\pi(y_q-y_q')}{4K_{Iq}}}{\mathfrak{Sin}\frac{\pi(y_q-y_q')}{4K_{Iq}} - h_I^2\,\mathfrak{Sin}\frac{3\pi(y_q-y_q')}{4K_{Iq}}}\,,\\
\frac{\vartheta_2'\left(\frac{i(y_q-y_q')}{4K_{Iq}}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{i(y_q-y_q')}{4K_{Iq}}\right)} &= -i\,\frac{\pi}{4K_{Iq}}\,\frac{\mathfrak{Sin}\frac{\pi(y_q-y_q')}{4K_{Iq}} + 3h_I^2\,\mathfrak{Sin}\frac{3\pi(y_q-y_q')}{4K_{Iq}}}{\mathfrak{Cof}\frac{\pi(y_q-y_q')}{4K_{Iq}} + h_I^2\,\mathfrak{Cof}\frac{3\pi(y_q-y_q')}{4K_{Iq}}}
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

mit $h_I = e^{-\pi K_{Iq}'/(2K_{Iq})} = 0{,}05375$.

Der Integrand von (16) ist ersichtlich rein imaginär. Das Integral (16) wird numerisch ausgewertet.

7. Die Joukowsky-Bedingung. Damit die Plattenhinterkanten nicht umströmt werden, muß die Zirkulationsströmung zusammen mit der Verdrängungsströmung an den Plattenhinterkanten die Geschwindigkeit Null ergeben, d. h. es muß sein

$$c\,\frac{dy_\Gamma}{d\xi} = -\,w_t(z_q)\,\frac{dy_q}{d\xi}\,, \tag{19}$$

worin alle Größen in den Punkten C der z_Γ- bzw. z_q-Ebene zu nehmen sind. (Aus Symmetriegründen können die Punkte C statt der Plattenhinterkantenpunkte B genommen werden.) Aus (19) folgt

$$c = -\,w_t(z_q)\,\frac{\dfrac{d\xi}{dy_\Gamma}}{\dfrac{d\xi}{dy_q}}\,. \tag{20}$$

Für $w_t(z_q)$ findet man durch Einsetzen von $y_q = 0$ in (16) den Wert $w_t(z_q) = -\,0{,}11252$. Der zweite Faktor auf der rechten Seite von (20) hat in C die unbestimmte Form 0/0. Nach (7) und (14) kann man für den Grenzwert schreiben

$$\frac{\dfrac{d\xi}{dy_\Gamma}}{\dfrac{d\xi}{dy_q}} = \lim_{\substack{\tau_q\to 1\\ \tau_\Gamma\to 1}} \sqrt{\frac{\varkappa_{\Gamma C}\,K_q\,(1-\varkappa_q^2)\,(1-k_q^2\varkappa_q^2)\,(1-\tau_\Gamma^2)\,(1-k_{I\Gamma}^2\tau_\Gamma^2)}{\varkappa_{qC}\,2K_\Gamma\,(1-\tau_q^2)\,(1-k_{Iq}^2\tau_q^2)\,(1-\varkappa_\Gamma^2)\,(1-k_\Gamma^2\varkappa_\Gamma^2)}}\,,$$

wenn hierin die Werte von K_q, K_Γ, k_q, k_{Iq}, k_Γ, $k_{I\Gamma}$ sowie $\varkappa_q = \varkappa_{qC} = 0{,}21218$ und $\varkappa_\Gamma = \varkappa_{\Gamma C} = 0{,}27083$ eingesetzt werden. Es ergibt sich

$$\frac{\dfrac{d\xi}{dy_\Gamma}}{\dfrac{d\xi}{dy_q}} = 0{,}98891 \cdot \lim_{\substack{\tau_q\to 1\\ \tau_\Gamma\to 1}} \sqrt{\frac{1-\tau_\Gamma^2}{1-\tau_q^2}}\,,$$

woraus weiter durch Ableiten des Zählers und des Nenners und Einsetzen von (3) und (12) folgt

$$\frac{\dfrac{d\xi}{dy_\Gamma}}{\dfrac{d\xi}{dy_q}} = 0{,}98891 \cdot \sqrt{\frac{\dfrac{d\tau_\Gamma}{d\zeta}}{\dfrac{d\tau_q}{d\zeta}}} = 0{,}87530 \cdot \sqrt{\frac{\dfrac{d\varkappa_\Gamma}{d\zeta}}{\dfrac{d\varkappa_q}{d\zeta}}}\,.$$

* *E.-G. Feindt*, a. a. O. und *A. Betz*, a. a. O Gleichungen (78,9) und (78,10).

Die in dieser Gleichung auftretenden Differentialquotienten können aus (2) und (11) berechnet werden, wenn man in diesen Gleichungen die sn-Funktionen durch die ersten beiden Glieder der Reihenentwicklung ersetzt gemäß der Formeln

$$\varkappa_\Gamma = 4{,}09909\,\zeta - \frac{1+k_\Gamma^2}{6}(4{,}09909\,\zeta)^3\,,$$

$$\varkappa_q = 3{,}20546\,\zeta - \frac{1+k_q^2}{6}(3{,}20546\,\zeta)^3\,.$$

Das Endergebnis der Rechnung lautet

$$\frac{\dfrac{d\xi}{dy_\Gamma}}{\dfrac{d\xi}{dy_q}} = 0{,}98702\,. \tag{21}$$

Mit dem angegebenen Wert von $w_t(z_q)$ und (21) folgt aus (20) $c = 0{,}11107$.

8. Rechenergebnis. In Abb. 8 ist für die Schaufeloberseite des Gitters *b* die Geschwindigkeitsverteilung der Verdrängungsströmung aufgetragen. Die Geschwindigkeitsverteilungen der Schaufelunterseite des Gitters *b* sowie die Geschwindigkeitsverteilung des Gitters *a* unterscheiden sich hiervon gemäß Abb. 2 nur durch das Vorzeichen. Zum Vergleich ist in Abb. 8 mit eingetragen die Geschwindigkeitsverteilung des Einzelgitters, das die gleiche Teilung hat wie das vielstufige Gitter, sowie die

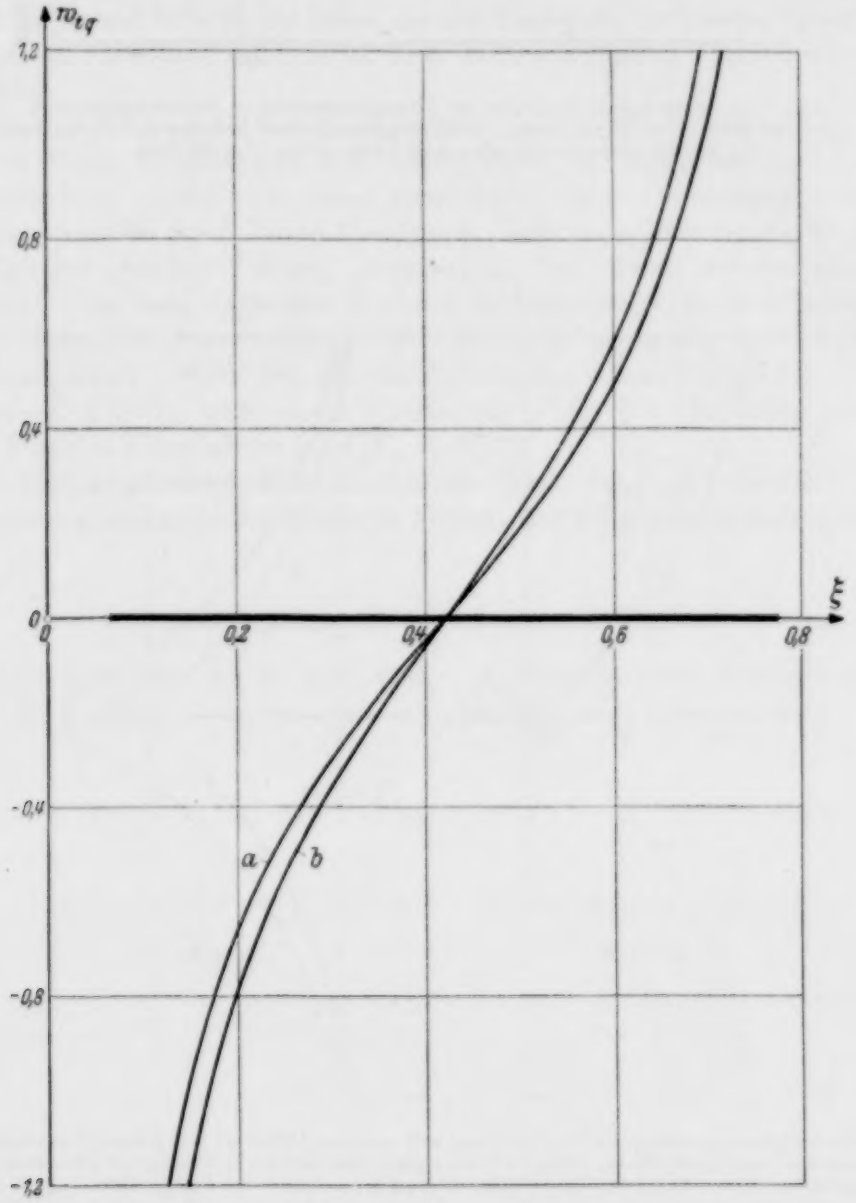


Abb. 8. Geschwindigkeitsverteilung der Verdrängungsströmung (Schaufeloberseiten), $U = 1$.
a) Gitter *b* des vielstufigen Gitters und Einzelgitter gleicher Teilung; b) Einzelplatte.

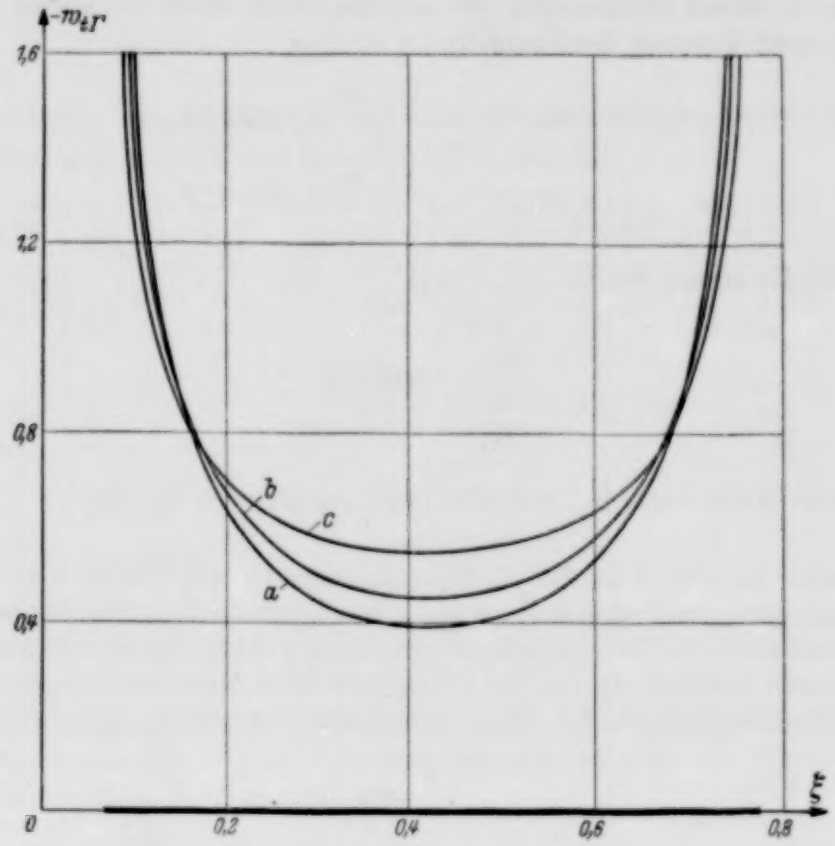


Abb. 9. Geschwindigkeitsverteilung der Zirkulationsströmung (Schaufeloberseiten).
a) Gitter b des vielstufigen Gitters; b) Einzelgitter gleicher Teilung; c) Einzelplatte.
Die Zirkulation ist in allen drei Fällen gleich, $\Gamma = 1{,}21060$.

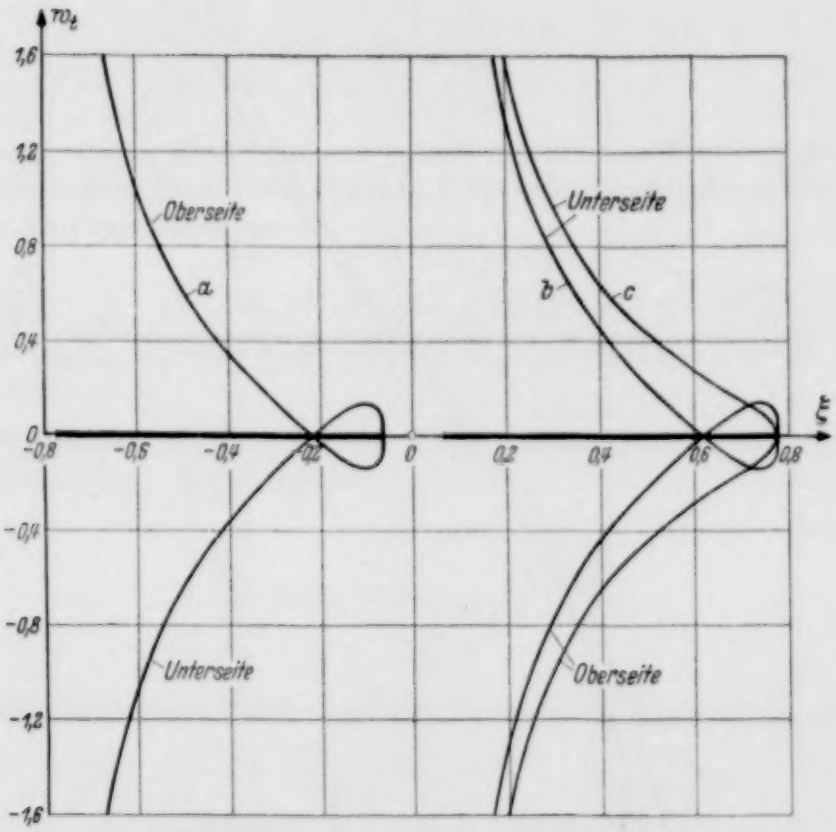


Abb. 10. Geschwindigkeitsverteilung für die Strömung mit glattem Abfluß an den Schaufelhinterkanten, $U = 1$.
a) Gitter a des vielstufigen Gitters; b) Gitter b des vielstufigen Gitters; c) Einzelgitter gleicher Teilung.
Zirkulationsverhältnis des vielstufigen Plattengitters $\Gamma/\Gamma_0 = 0{,}545$, des Einzelgitters $\Gamma/\Gamma_0 = 0{,}724$.

Geschwindigkeitsverteilung der Einzelplatte. Die Vergleichsströmungen muß man sich so entstanden denken, daß sich eine Einzelplatte bzw. ein Einzelgitter in ruhendem Medium senkrecht zu der Platte bzw. parallel zur Gitterfront bewegt mit der Geschwindigkeit $U = 1$. Die Verdrängungsströmung des vielstufigen Plattengitters entsteht dadurch, daß in einem ruhenden Medium alle Schaufelreihen b mit der Geschwindigkeit $U = 1$ in positiver η-Richtung und alle Schaufelreihen a mit der Geschwindigkeit $U = -1$ in negativer η-Richtung bewegt werden. Überraschend ist der Umstand, daß die Geschwindigkeitsverteilungskurven des Einzelgitters und des vielstufigen Gitters im Rahmen der Rechengenauigkeit ($\pm 0{,}5\%$) zusammenfallen. Es folgt daraus, daß die gegenseitige Beeinflussung nebeneinander liegender Gitter bei der Verdrängungsströmung sehr gering ist. Ein ähnliches Ergebnis war für das Tandemplattengitter gefunden worden.*

In Abb. 9 ist die Geschwindigkeitsverteilung der Zirkulationsströmung für eine Platte des Gitters b dargestellt. Es sind wieder zum Vergleich eingetragen die entsprechenden Geschwindigkeitsverteilungen des Einzelgitters gleicher Teilung und der Einzelplatte. Die Zirkulation ist für alle drei Kurven gleich, $\Gamma = 1{,}21060$. Der Einfluß der benachbarten Platten bewirkt beim Einzelgitter eine Abnahme der Geschwindigkeit in Schaufelmitte gegenüber der Einzelplatte. Bei dem vielstufigen Gitter wird eine weitere Geschwindigkeitsabnahme in der Schaufelmitte dadurch verursacht, daß die Strömung an den Schaufelenden auf den Spalt eingeschnürt wird. Dies führt zu einer Geschwindigkeitszunahme an den Schaufelenden und damit wegen der konstanten Zirkulation zu einer Geschwindigkeitsabnahme in Schaufelmitte.

Als letztes ist in Abb. 10 die Geschwindigkeitsverteilung aufgetragen von je einer Platte der Gitter a und der Gitter b, und zwar für den Fall, daß die *Joukowsky*-Bedingung erfüllt ist. Die Geschwindigkeitsverteilung Abb. 10 ist berechnet als Differenz $w_{tq} - w_{t\Gamma}$ der Geschwindigkeitsverteilungen von Abb. 8 und Abb. 9, die beide an den Plattenhinterkanten unendlich sind. Daher ist die Geschwindigkeitsverteilung Abb. 10 in den letzten 10% der Plattentiefe (an den Plattenhinterkanten) unsicher.

Eigentümlich ist das Überschneiden der Geschwindigkeitsverteilungskurven in der Nähe der Plattenhinterkanten. Diese Erscheinung trat schon beim Tandemgitter auf**. Die allgemeinste Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich, wenn man der Geschwindigkeitsverteilung Abb. 10 noch eine Parallelströmung parallel zur ξ-Achse überlagert. Zum Vergleich ist die Geschwindigkeitsverteilung des Einzelgitters gleicher Teilung eingetragen, das ebenso wie das vielstufige Gitter mit der Geschwindigkeit U in dem ruhenden Medium in Gitterfrontrichtung bewegt wird. Aus den Geschwindigkeitsverteilungen geht hervor, daß die Zirkulation des vielstufigen Gitters kleiner ist als die des Einzelgitters. Nach (9) ist die Zirkulation einer Platte des vielstufigen Gitters $\Gamma = 1{,}21060$ (bzw. $-1{,}21060$), was einem Verhältnis $\Gamma/\Gamma_0 = 0{,}545$ entspricht (Γ_0 Zirkulation der Einzelplatte). Für das Einzelgitter ist $\Gamma/\Gamma_0 = 0{,}724$.

Zum Schluß sei noch angemerkt, daß auf ähnliche Weise der Fall berechnet werden kann, daß die beiden Gitterreihen a und b des vielstufigen Gitters um $t/2$ gegeneinander versetzt sind.

(Eingegangen am 17. September 1960.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *E.-G. Feindt*, Hamburg-Garstedt, Breslauer Str. 13.

* Vgl. *E.-G. Feindt*, a. a. O.
** *E.-G. Feindt*, a. a. O.

Über Messungen an periodisch instationär angeströmten Tragflügeln*

Von H. Schwanecke

Mitteilung Nr. 247 der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin

1. Einleitung. Die in dem vorliegenden Bericht mitgeteilten Ergebnisse von Messungen an instationär angeströmten Tragflügeln sind Teil eines Forschungsvorhabens mit dem Ziel der theoretischen und experimentellen Ermittlung der instationären hydrodynamischen Kraftwirkungen an schwingenden Propellern[1], Propellern in peripher ungleichförmiger Strömung[2,3] und an Wassertragflügeln unter Seegangsbedingungen (Tragflügelboote). Die experimentellen Untersuchungen, die an ebenen rechteckigen Tragflügeln mit Plattenprofil durchgeführt wurden, waren erforderlich, um grundsätzliche Fragen hinsichtlich der Größe und des zeitlichen Verlaufs der Normal- und Tangentialkräfte sowie des Strömungsverlaufes in der Umgebung der Tragflügel zu klären. Außerdem war es notwendig, theoretische Untersuchungen, die an Tragflügeln großer Spannweite bei periodisch instationärer Anströmung durchgeführt wurden, experimentell nachzuprüfen.

Die Messungen sollten sich in der Hauptsache auf die Vorgänge an einem feststehenden Tragflügel in periodisch instationärer Strömung erstrecken. Für den Vergleich mit den theoretischen Rechnungen war es erwünscht, ein Geschwindigkeitsfeld zu erzeugen, in dem zeitlich veränderliche Geschwindigkeitskomponenten nur in der zur Tragflügeloberfläche senkrechten Ebene auftraten, die Geschwindigkeitskomponenten in der Ebene des Tragflügels jedoch konstant blieben. Ferner sollte das instationäre Strömungsfeld zweidimensional sein. Wird ein raumfestes rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y, z) eingeführt, dessen positive x-Achse in Richtung der mittleren Strömungsgeschwindigkeit und dessen positive z-Achse nach oben zeigt, so müssen in einem instationären Geschwindigkeitsfeld mit den erwähnten Eigenschaften die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}(t)$ den Bedingungen genügen

$$v_x = v_0 = \text{konst.},$$
$$v_y = 0,$$
$$v_z = |w| \sin(\nu t - \nu t_1).$$

Wegen $v_0 = \text{konst.}$ kann für die Komponente v_z gesetzt werden.

$$v_z = |w| \sin\left(\nu t - \frac{\nu x}{v_0}\right).$$

Für die Bezeichnungen siehe man Abschnitt **5**, c).

2. Meßapparatur und Messungen. a) Großer Schlagflügel. Ein instationäres Geschwindigkeitsfeld, das den gewünschten Bedingungen entspricht, kann mit einem zwischen zwei senkrechten Wänden schwingenden Schlagflügel, das ist ein Tragflügel, der translatorische Bewegungen senkrecht zu seiner Ebene ausführt, mit ausreichender Genauigkeit erzeugt werden [vgl. Abschnitt **5** (a)]. Hierbei ist die Konstruktion des Schlagflügelantriebes mit großer Sorgfalt auszuführen, da eine reine Sinus-Bewegung erzielt werden muß. Aus diesem Grunde wurde eine Antriebsanlage mit Exzenterscheiben, Gleitsteinen und vertikalen Schubstangen gewählt, wie aus der Skizze und den Fotografien der Abb. 1 zu ersehen ist[4]. Weitere Antriebselemente waren ein Schneckengetriebe ($i = 10{,}3$), ein stufenlos regelbares Getriebe (sog. H-Trieb, mit einem Gesamtregelbereich 1:9) und ein elektronisch gesteuerter Drehstrommotor (1,5 PS bei 1400 U/min). Die seitlichen parallelen Leitwände, die sich vom Tankboden bis etwa 150 mm über die Wasseroberfläche erstreckten, befanden sich in etwa 2 mm Abstand von den Seitenkanten des Schlagflügels, der eine Breite von $b = 1500$ mm hatte. Bei einer Breite der Meßstrecke des Umlauftanks von ca. 1800 mm verblieben damit an

* Mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft durchgeführt.

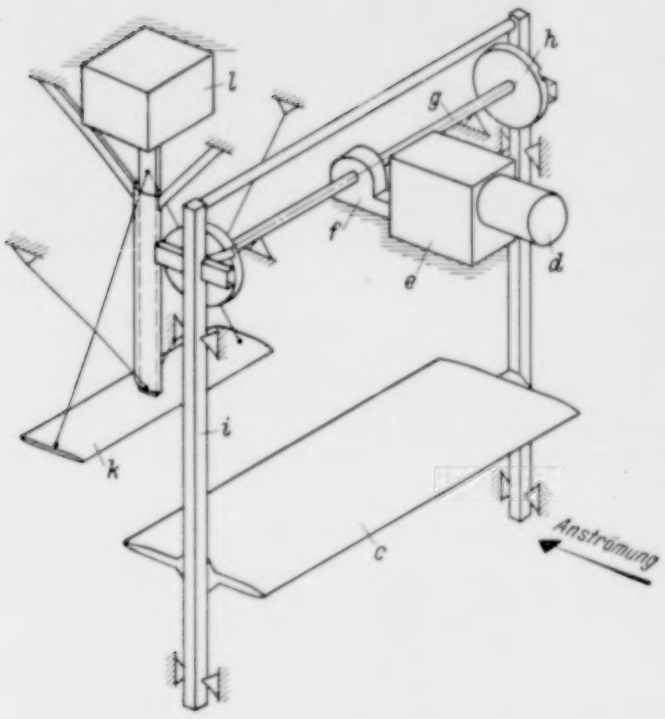
[1] *H. Schwanecke*, Schiffstechnik 7 (1960) S. 170.

[2] *S. Schuster* Z. VDI. 89 (1955) S. 1781.

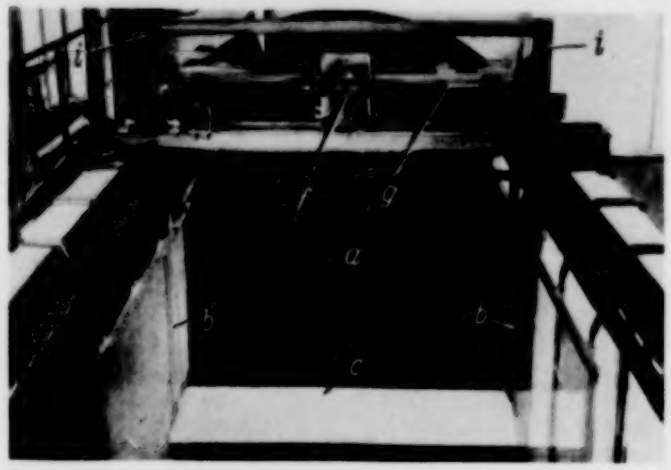
[3] *W. H. Isay*, Schiffstechnik 5 (1958) S. 157.

[4] *H. Schwanecke*, Untersuchung von Tragflügeln in ungleichförmiger Strömung als räumliches Problem, Forschungsvorhaben DFG Schu 24/16 u. 24/21, Bericht Nr. 1 (1959) (unveröffentlicht).

jeder Seite noch etwa 140 mm zur Aufnahme der Schubstangen und der notwendigen Lagerungen und Führungen. Die Leitwände wurden bis in die Einlaufdüse des Umlauftanks hineingeführt und dort befestigt. Dadurch wurde die Tankbreite auf etwa 1500 mm verkleinert und der Verengungsfaktor der Einlaufdüse im Verhältnis 1,8:1,5 vergrößert. Störungen der Geschwindigkeitsverteilung in der Meßstrecke wurden bei einer derartigen Anordnung der Leitwände praktisch nicht hervor-

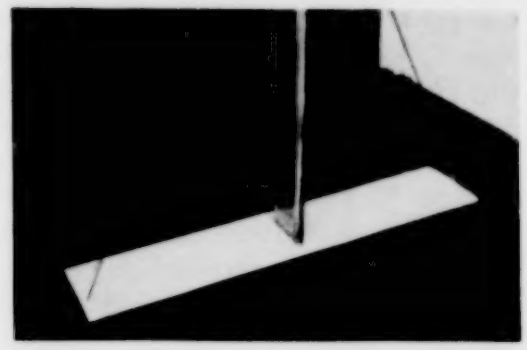


a



b

c



d

Abb. 1. Versuchseinrichtung.

a) Schema.
b) u. c) Schlagflügel mit Antrieb.
d) Tragflügel.

Bezeichnungen: *a* Einlaufdüse des Umlauftanks; *b* Leitwände; *c* Schlagflügel; *d* Antriebsmotor; *e* Getriebe (H-Trieb, stufenlos regelbar); *f* Schneckentrieb; *g* Antriebswelle; *h* Exzenterscheiben; *i* Schubstangen; *k* Tragflügel; *l* Sechskomp.-Waage.

gerufen. In Strömungsrichtung erstreckten sich die Leitwände bis etwa 1000 mm hinter die Austrittskante des Schlagflügels. Ein Teil der auf der verglasten Seite der Meßstrecke befindlichen Leitwand wurde aus Plexiglas hergestellt, um fotografische Aufnahmen zu ermöglichen.

Die Profillänge des aus einer Stahlkonstruktion (Profilstahl mit Mantelblech) bestehenden Schlagflügels betrug 533 mm, die größte Dicke 32 mm ($d/l = 0{,}06$), als Profil wurde das in Abb. 2a angegebene Plattenprofil verwendet. Die Antriebsanlage wurde so ausgelegt, daß bei einer mittleren Strömungsgeschwindigkeit in der Meßstrecke von $v_0 = 2$ m/s und einer Abwindamplitude von $|w| = 0{,}25\, v_0 = 0{,}5$ m/s mit Schlagfrequenzen bis 6 Hz gearbeitet werden konnte. Es konnten damit reduzierte Frequenzen für den Schlagflügel von maximal $\mu = \nu\, l/2\, v_0 = 5$ erreicht werden. Um bei allen reduzierten Frequenzen eine Abwindamplitude ungefähr gleicher Größe zu erhalten, war es notwendig, mit steigender reduzierter Frequenz die Schlagamplitude zu verkleinern [vgl. Abschnitt **5**,a)]. Aus diesem Grunde wurden die Gleitsteine auf den Exzenterscheiben so weit verschiebbar angeordnet, daß die Schlagamplitude zwischen 0 und 80 mm verändert werden konnte.

Bei den Versuchen hatte die mittlere Strömungsgeschwindigkeit in der Meßstrecke die Größe $v_0 = 1{,}3$ m/s, mit Ausnahme der Messungen bei der kleinsten reduzierten Frequenz; hier wurde sie auf $v_0 = 1{,}4$ m/s erhöht. Die Schlagamplituden wurden zwischen 79 mm bei der kleinsten ($\mu = 0{,}75$)

und 7,6 mm bei der größten reduzierten Frequenz ($\mu = 4{,}5$) variiert. Die Abwindamplituden hatten dann im Mittel etwa die Größe $|w| \approx 0{,}16\ v_0$. Diese Reduktion der Versuchsdaten gegenüber den Daten der Auslegung erwies sich als notwendig, da bei den Messungen an dem feststehenden Tragflügel die Gefahr des Überlastens der Sechskomponentenwaage bestand. Die Wassertiefe am Ort des Schlagflügels betrug 1140 mm, die Nullstellung des Flügels lag etwa 600 mm über dem Tankboden. Zur Messung der Schlagfrequenzen diente ein elektrisches Zählwerk, das von einem an einer der vertikalen Schubstangen befestigten Kontakt betätigt wurde. Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit wurde mit einem etwa 0,8 m vor der Schlagflügeleintrittskante angeordneten *Prandtl*rohr gemessen.

Abb. 2. Plattenprofile.

a) Schlagflügel

x/t	—1,0	—0,975	—0,950	—0,925	—0,900	—0,850	—0,800	.....	0	.....	0,700	0,800	0,900	0,950	0,975	1,0
z/t	0	0,024	0,039	0,049	0,055	0,059	0,060	.....	0,060	.....	0,060	0,053	0,032	0,017	0,009	0

b) Tragflügel

x/t	—1,0	—0,975	—0,950	—0,925	—0,900	—0,850	—0,800	.....	0	.....	0,600	0,700	0,800	0,900	0,950	0,975	1,0
z/t	0	0,016	0,030	0,038	0,043	0,048	0,050	.....	0,050	.....	0,050	0,047	0,040	0,026	0,015	0,008	0

b) Kleiner Schlagflügel. Der große Schlagflügel diente nur zum Erzeugen eines periodisch instationären Strömungsfeldes. Zu den beabsichtigten Messungen des Phasenwinkels zwischen Schlagbewegung und Normalkraftverlauf, wozu Dehnungsmeßstreifen verwendet werden sollten, war er infolge seiner Konstruktion nicht geeignet. Mit diesen Messungen sollten die Ergebnisse der Theorie des schwingenden Flügels im Bereich kleiner reduzierter Frequenzen nachgeprüft werden, was für die Anwendung dieser Theorie auf den Fall eines schwingenden Schiffspropellers von Bedeutung ist. Es wurde hierfür aus einer 10 mm starken Stahlplatte ein weiterer Schlagflügel mit den Abmessungen $b = 1500$ mm, $l = 150$ mm, $d = 10$ mm ($d/l = 0{,}067$) angefertigt. Das Profil, ebenfalls ein Plattenprofil, ergab sich aus dem Profil für den großen Schlagflügel (Abb. 2a) durch Verzerren der Ordinaten im Verhältnis 6,7:6. Um die für die in der Flügelmitte angebrachten Dehnungsmeßstreifen notwendigen elastischen Verformungen bei der Schlagbewegung zu erreichen, wurde der Tragflügel an den Schubstangen mit Zapfen gelagert. Auf der einen Seite wurden zwei Zapfen angebracht, um das Moment der hydrodynamischen Normalkraft um die waagerechte Achse aufzunehmen und auf der anderen Seite nur ein Zapfen in der Nähe des vorderen Neutralpunktes des Tragflügels. Diese Anordnung der Zapfen sollte verhindern, daß bei der Schlagbewegung infolge nicht parallelen Laufes der Schubstangen zusätzliche Biege- oder Torsionsspannungen im Flügel auftreten, wodurch die Anzeige der Dehnungsmeßstreifen verfälscht worden wäre.

Bei den Versuchen wurden die mittlere Strömungsgeschwindigkeit zwischen $v_0 = 0$ und $v_0 = 3{,}1$ m/s und die Schlagfrequenzen zwischen $f = 0{,}6$ Hz und $f = 1{,}5$ Hz variiert. Schlagfrequenzen und Strömungsgeschwindigkeiten wurden so aufeinander abgestimmt, daß reduzierte Frequenzen zwischen $\mu = 0{,}08$ und $\mu = \infty$ erreicht werden konnten. Dem Bereich kleiner reduzierter Frequenzen wurde besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Die Schlagamplitude betrug bei der Mehrzahl der Messungen 7,5 mm. Zum Überprüfen einer möglichen nichtlinearen Abhängigkeit des zeitlichen Verlaufes der Normalkraft von der Amplitude wurden vereinzelte Messungen mit Schlagamplituden der Größe 14,7 mm und 30 mm durchgeführt.

Die Dehnungsmeßstreifen wurden auf beiden Seiten des Schlagflügels angeordnet und mit einer Trägerfrequenz-Meßbrücke betrieben, die vorher auf mögliche Phasenfehler bei der Anzeige überprüft wurde. Als Registriergerät diente ein Schleifen-Oszillograph mit Schleifen hoher Eigenfrequenz. Die Messungen wurden in Luft und bei den oben angegebenen Variationen von Frequenz, Schlagamplitude und mittlerer Strömungsgeschwindigkeit im Wasser durchgeführt.

c) Schlagflügelabwind. Zum Aufmessen der Amplituden des instationären Strömungsfeldes hinter dem großen Schlagflügel diente eine Platte mit drei Reihen von je acht Fadensonden, wie sie aus der Abb. 3a zu ersehen ist. Die Fäden bestanden aus Wolle, waren hinreichend dünn und hatten eine Länge von etwa 50 mm. Ihr gegenseitiger Abstand in Strömungsrichtung betrug 55 mm, die

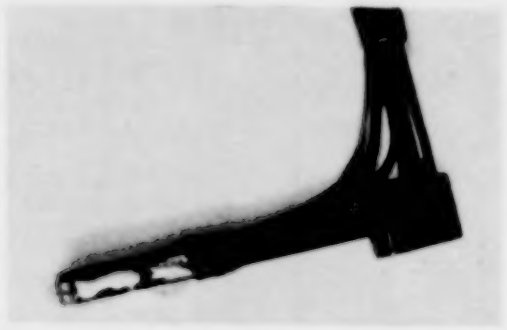
a

b

c

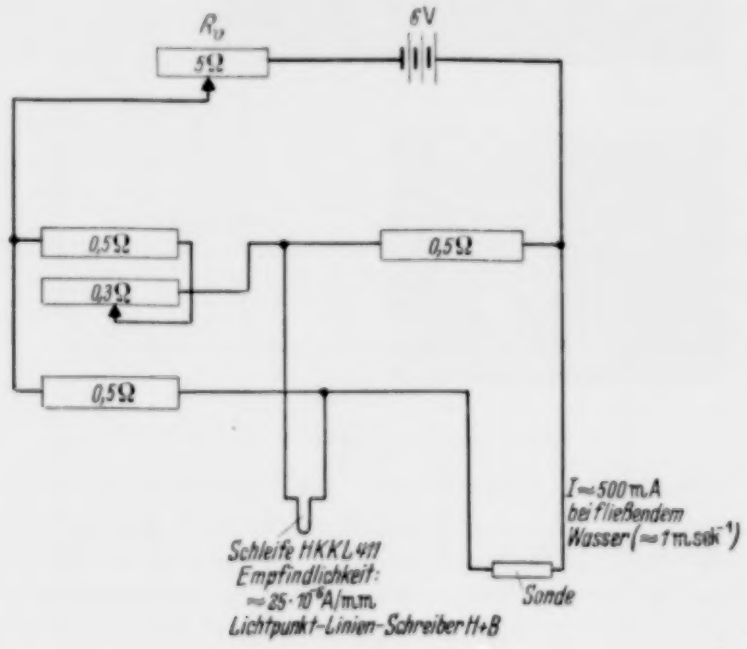
a) Meßeinrichtung (Fadensonden).
b) Unbeeinflußte Strömung.
c) Durch den Tragflügel beeinflußte Strömung.

Abb. 3. Bestimmung der Amplituden der periodisch instationären Strömung.
Reduzierte Frequenz $\mu = 1{,}13$; Fortschrittsgeschwindigkeit $v_0 = 1{,}29$ m/sek. Datum: 11. 11. 59 u. 20. 1. 60.



a

b



c

Abb. 4. Hitzfilm-Sonde (VWS).

a) Ansicht der Sonde.
b) Stirnfläche der Sonde (3 × 4 mm) mit Meßelement (2,5 μ Pt-Folie).
c) Schaltschema.

drei Reihen waren je 40 mm voneinander entfernt. Die Platte mit den Fadensonden wurde 250 mm neben der Mittelebene des Schlagflügels angebracht. Sie konnte in Strömungsrichtung so weit verschoben werden, daß es möglich war, mit den Fadensonden einen Bereich von 100 mm bis 830 mm hinter der Austrittskante des großen Schlagflügels zu erfassen. Die Platte wurde mit einer Kamera mit Teleobjektiv bei Dunkelfeldbeleuchtung und etwa 2—3 s Belichtungszeit von der Seite fotografiert. Der große Vorteil der Zeitaufnahmen bestand darin, daß sich infolge der Abnahme der Geschwindigkeit auf den Wert Null in den Endlagen, diese besonders deutlich markierten. Dadurch konnte die Amplitude der periodischen Störgeschwindigkeiten leicht bestimmt werden. Außerdem wurde durch die Zeitaufnahmen eine Mittelwertbildung erreicht. Mit den Fadensonden

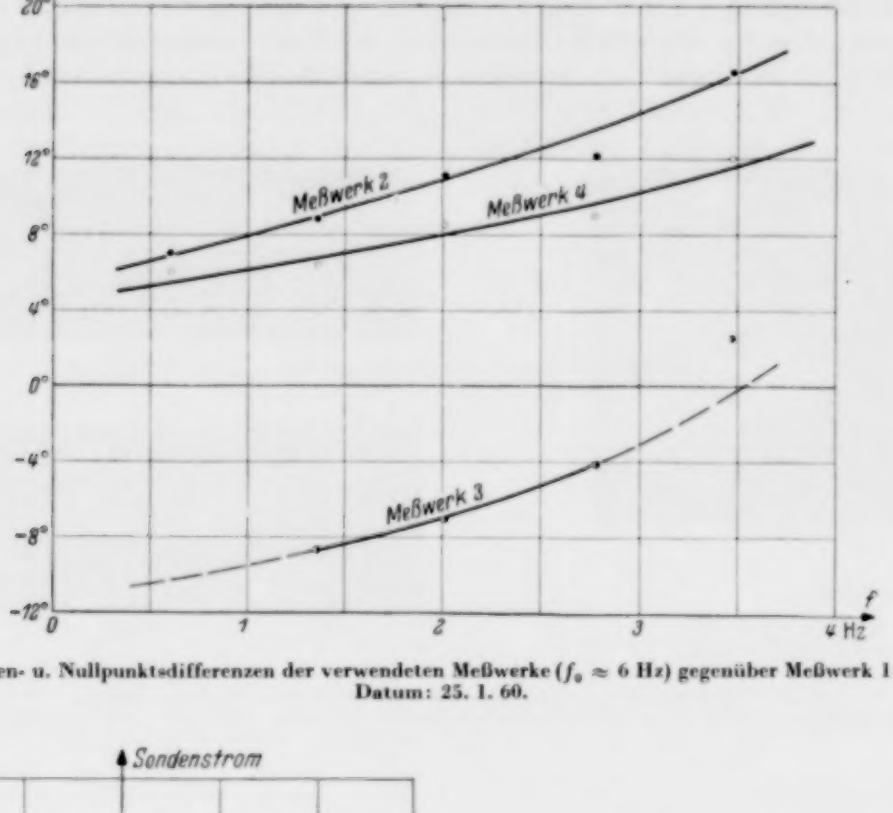


Abb. 5. Phasen- u. Nullpunktsdifferenzen der verwendeten Meßwerke ($f_0 \approx 6$ Hz) gegenüber Meßwerk 1 ($f_0 \gg 1$ Hz). Datum: 25. 1. 60.

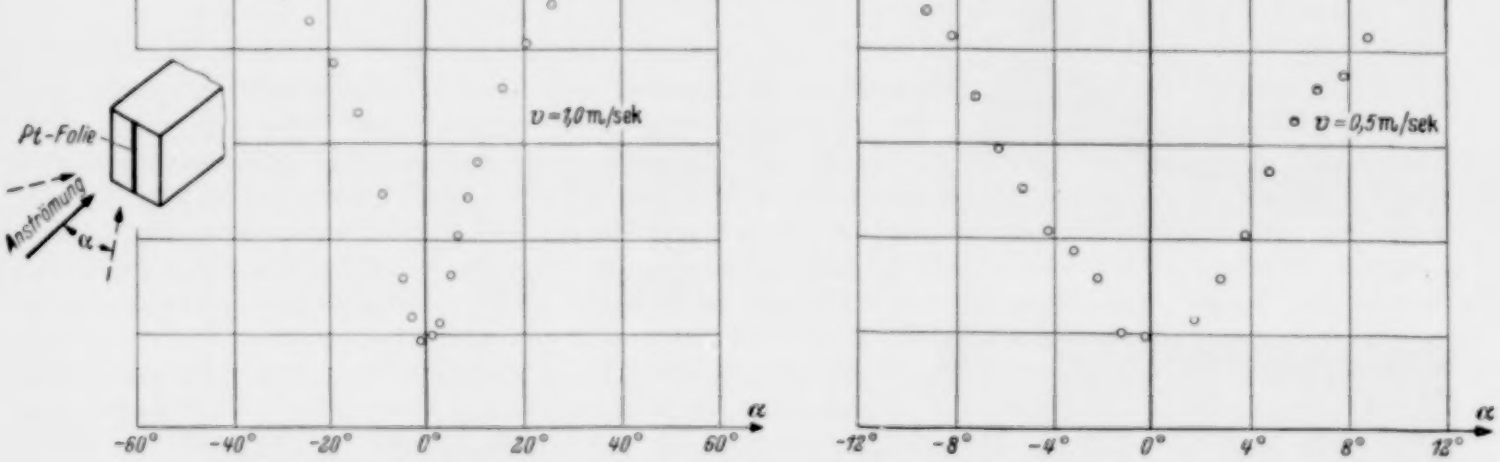


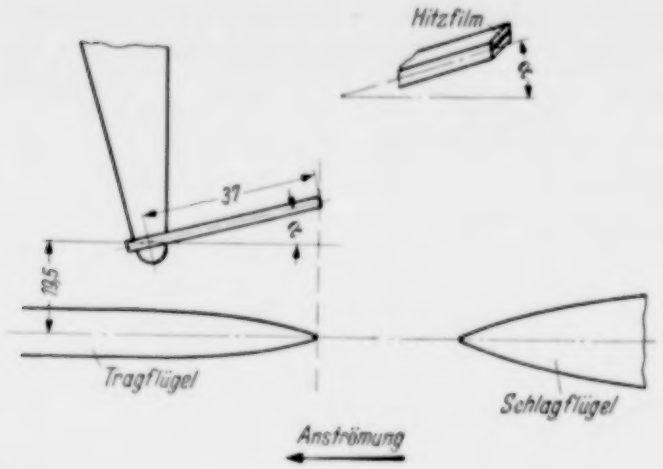
Abb. 6. Richtungsempfindlichkeit der Hitzfilm-Sonde. Datum: 26. 2. 1960.

wurden sowohl die Amplituden des unbeeinflußten periodisch instationären Strömungsfeldes (Abb. 3b) als auch die des durch den festen Tragflügel gestörten Strömungsfeldes (Abb. 3c) ermittelt.

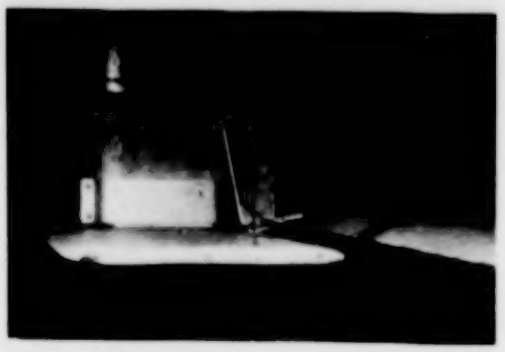
Zum Aufmessen des zeitlichen Verlaufes des instationären Strömungsfeldes wurde eine für diesen Zweck speziell angefertigte Hitzfilmsonde (Abb. 4) verwendet. Als Meßelement diente eine Platinfolie mit den Abmessungen $4 \times 0{,}2 \times 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ mm. Die Sonde wurde in der in Abb. 4c angegebenen Weise elektrisch geschaltet. Zur Aufnahme der Signale diente ein Lichtpunktlinienschreiber mit hochempfindlichen Galvanometern. Diese Meßwerke hatten infolge ihrer hohen Empfindlichkeit nur eine Eigenfrequenz von etwa $f_0 = 6$ Hz, so daß es notwendig war, ihre Phasenfehler zu bestimmen. Hierzu wurden Vergleichsmessungen mit einem Galvanometer geringer Empfindlichkeit und hoher Eigenfrequenz durchgeführt (Abb. 5).

Eine in der angegebenen Weise betriebene Hitzfilmsonde hat bekanntlich eine Geschwindigkeits-Widerstandscharakteristik, die sich mit zunehmender Geschwindigkeit einem Grenzwert nähert. Infolgedessen treten im Bereich höherer mittlerer Geschwindigkeiten auch bei relativ starken Geschwindigkeitsänderungen keine nennenswerten Widerstandsunterschiede mehr auf. Diese Eigenschaft der Sonde konnte zum Bestimmen des zeitlichen Verlaufes der periodischen Zusatzgeschwindigkeiten des Strömungsfeldes ausgenutzt werden. Das Platinmeßelement wurde zu diesem

Zweck auf der abgeplatteten Stirnfläche des Trägerkörpers befestigt (Abb. 4b). Bildet die Stirnfläche mit der Richtung der Anströmung einen rechten Winkel, so liegt das Meßelement in bzw. in der Nähe der Staupunktes. Ändert sich nun die Strömungsrichtung um einen gewissen Winkel, so wandert der Staupunkt, und das Meßelement gerät mit zunehmendem Winkel in den Bereich höherer Strömungsgeschwindigkeiten. Da im Staupunktbereich die örtlichen Geschwindigkeiten klein sind, ist die Empfindlichkeit der Sonde hier verhältnismäßig groß. Die Abb. 6 zeigt Messungen, die mit der Sonde bei konstanter Strömungsgeschwindigkeit bei verschiedenen Anstellwinkeln durchgeführt wurden. Man sieht hier deutlich die starke Winkelabhängigkeit bis zu etwa 40°. Da die Sonde nur Änderungen der Strömungsgeschwindigkeit anzeigt, gleichgültig ob es sich dabei um eine Folge von Winkeländerungen oder um Änderungen der mittleren Strömungsgeschwindigkeit handelt, sind die Ergebnisse nur qualitativ zu verwerten, was aber für den beabsichtigten Zweck ohne Bedeutung war. Beim Betrieb wurde die Sonde an einem aus Stahlblech bestehenden Träger befestigt (Abb. 7), der in Strömungsrichtung verschoben werden konnte. Es war dadurch möglich, in dem oben angegebenen Bereich hinter dem großen Schlagflügel in jedem beliebigen Punkt den zeitlichen Verlauf der periodischen Zusatzgeschwindigkeiten zu bestimmen.



a



b

c

Abb. 7. Anordnung der Hitzfilmsonde.

a) Schema.
b) Sonde in Meßposition.
c) Sonde mit Träger.

d) Feststehender Tragflügel. Der feststehende Tragflügel hatte eine Breite $b = 1000$ mm, eine Profillänge $l = 200$ mm, eine Dicke $d = 10$ mm ($b/l = 5$, $d/l = 0{,}05$) und wurde aus einer Stahlplatte mit dem in Abb. 2b angegebenen Profil (Plattenprofil) hergestellt. An dem Flügel wurde eine freistehende Mittelstütze angeordnet, mit der er an dem Meßglied einer Sechskomponentenwaage befestigt werden konnte. Um die Stütze dem Einfluß der Strömung zu entziehen, wurde sie innerhalb einer profilierten Blechverkleidung angeordnet, deren Unterkante sich etwa 5 mm über dem Tragflügel befand und die an ihrem oberen Ende mit dem Gehäuse der Sechskomponentenwaage verbunden wurde. Um die Schwingungsfähigkeit des Systems zu vermindern, wurden die Verkleidung und der Tragflügel in geeigneter Form mit Drähten verspannt (Abb. 1d).

Zur Messung der an dem feststehenden Tragflügel auftretenden Kraftwirkungen diente die in der VWS entwickelte kleine Sechskomponentenwaage, über die in der Literatur schon verschiedentlich berichtet wurde (vgl. z. B.[1]). Zur Registrierung der Signale der Sechskomponentenwaage wurde der schon erwähnte Schleifen-Oszillograph mit Meßwerken hoher Eigenfrequenzen verwendet.

Die zu den induktiven Komponentengebern der Sechskomponentenwaage gehörenden Trägerfrequenz-Meßbrücken waren zunächst auf mögliche Phasenfehler zu untersuchen. Hierzu wurde der zeitliche Bewegungsverlauf einer der Schubstangen des Schlagflügels mit Hilfe eines Schiebewiderstandes und mit Hilfe eines als Beschleunigungsgeber verwendeten induktiven Meßwert-Gebers, der mit einer der Meßbrücken verbunden wurde, mit dem Schleifenoszillographen aufgenommen. Daraus konnte dann der Phasenfehler der Meßbrücke bestimmt werden (Abb. 8). Da der konstruk-

[1] *H. Schwanecke*, Schiffstechnik 6 (1959) S. 93.

tive Aufbau bei allen Trägerfrequenzbrücken der gleiche war, wurde die Überprüfung nur eines Gerätes als ausreichend angesehen.

Der Abstand zwischen Schlagflügelaustrittskante und Tragflügeleintrittskante betrug bei kleinen reduzierten Frequenzen 100 mm und bei großen reduzierten Frequenzen 550 mm. Die große Entfernung mußte gewählt werden, weil die instationären Kraftwirkungen bei dem kleinen Abstand zwischen Schlagflügel und festem Flügel mit größer werdenden reduzierten Frequenzen so groß wurden, daß der Tragflügel einschließlich der Sechskomponentenwaage und der Haltebühne zu schwingen begann. Da aber das instationäre Strömungsfeld hinter dem Schlagflügel in genügend vielen Punkten aufgemessen wurde, hatte die Veränderung des Abstandes zwischen Schlagflügel und festem Flügel auf die Güte der Messungen keinen Einfluß.

Im vorliegenden Fall war der Strömungszustand zweidimensional, so daß nur eine Dreikomponenten-Messung vorgenommen zu werden brauchte. In dem instationären Geschwindigkeitsfeld waren in erster Näherung nur Zusatzgeschwindigkeiten parallel der z-Achse mit einem nahezu reinen Sinus-Verlauf vorhanden. Die Tragflügel-Normalkraft hatte daher keinen zeitlichen Mittelwert. Infolgedessen war es möglich, mit Hilfe der Signale von den drei in der Vertikalebene liegenden Komponentengebern der Sechskomponentenwaage Normalkraft, Moment der Normalkraft um eine Achse parallel der Flügeleintrittskante und Tangentialkraft (induzierter Widerstand) des Tragflügels zu messen. Die Abb. 9 zeigt einen Schrieb des Schleifenoszillographen mit den

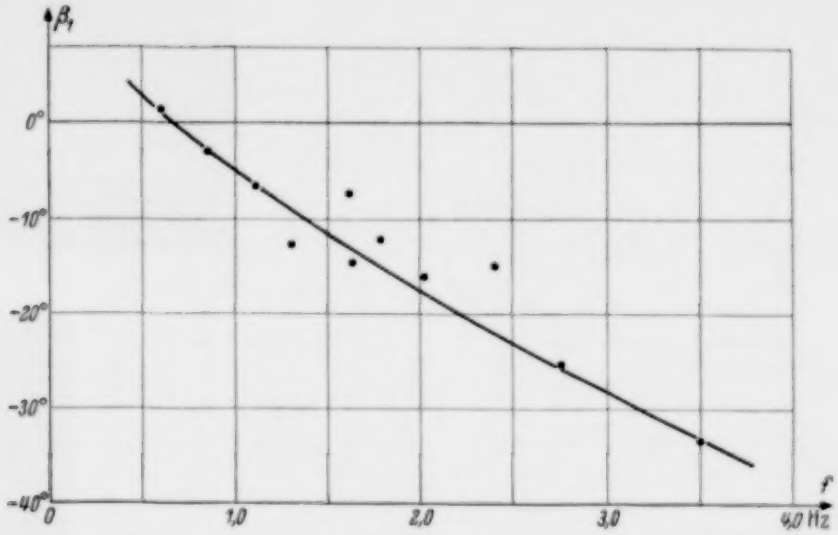


Abb. 8. Phasenfehler der Meßbrücke 1 (Kompon. „a") bezüglich der Synchronisierungsmarken. Datum: 1. 2. und 8. 2. 60.

Signalen der Komponentengeber a, b und c. Außerdem ist ein 100 Hz-Signal als Zeitmarke, mit kurzzeitigen Unterbrechungen durch den Drehzahlkontakt des Schlagflügelantriebes, auf dem Oszillogramm zu erkennen. Die Drehzahlmarke wurde gleichzeitig zur Synchronisierung der Signale der Sechskomponentenwaage und der Hitzfilmsonde verwendet.

Die Abb. 10 zeigt die mit einem Lichtpunktlinienschreiber aufgenommenen Signale der Komponente a, der Hitzfilmsonde und des Drehzahlkontaktes bei zwei verschiedenen Schreibegeschwindigkeiten des Registriergerätes. Man sieht deutlich die mit der Hitzfilmsonde aufgenommenen zeitlichen Schwankungen der Anströmrichtung. Die zeitliche Lage der Extremwerte läßt sich daraus leicht bestimmen. Die Stirnfläche der Sonde lag mit der Vorderkante des feststehenden Flügels in einer Vertikalebene (Abb. 7a). Die Unsymmetrie des Hitzfilm–Sonden-Signales ist darauf zurückzuführen, daß die Sonde, je nach der Anströmrichtung, einmal in der nahezu ungestörten Zuströmung und das andere Mal in der durch die Tragflügelvorderkante beeinflußten Strömung lag.

3. Ergebnisse. a) Großer Schlagflügel. Mit Hilfe der in Abschnitt **2**, c) beschriebenen Fadensonden wurden die dimensionslosen Abwindamplituden $\overline{w} = |w|/v_0$ des großen Schlagflügels für reduzierte Frequenzen $\mu = 0{,}75 - 4{,}5$ in 100 mm bis 830 mm Entfernung von der Schlagflügelaustrittskante bestimmt. Eine Darstellung der Abwindamplituden, bezogen auf eine dimensionslose Schlagamplitude der Größe 1, befindet sich in der Abb. 11. Zum Vergleich wurden die mit Hilfe der Formeln des Abschnittes **5**, a) ermittelten theoretischen Abwindamplituden für $\xi = 1{,}62$ und $\xi = \infty$ in die Abb. 11 eingetragen.

Es zeigt sich hier eine starke, mit wachsender reduzierter Frequenz zunehmende Abweichung der Meßwerte von den theoretisch berechneten Werten.

Das mit wachsendem Abstand von der Austrittskante durch den turbulenten Strömungszustand in der Meßstrecke bedingte Abwandern eines Teiles der in der Wirbelschleppe des Schlagflügels enthaltenen Energie in die über und unter ihr befindlichen Strömungsbezirke und der dadurch hervorgerufene Abbau der Abwindamplituden auf der Spur des Schlagflügels macht sich, wie die Auswertung der Abwindfotografien zeigte, erst in einer Entfernung von etwa 600 bis 700 mm hinter dem Schlagflügel, d. h. für $\xi > 2{,}4$ stärker bemerkbar. Die Abweichung der Meßwerte von den theoretischen Werten muß daher andere Ursachen haben. Auch scheidet die bei den Versuchen nicht eingehaltene Bedingung kleiner Schlagamplituden, die den theoretischen Rechnungen zugrunde liegt, als Fehlerquelle aus, da die stärksten Differenzen bei hohen reduzierten Frequenzen auftreten, also gerade dort, wo mit geringen Schlagamplituden gearbeitet wurde. Die Abweichungen

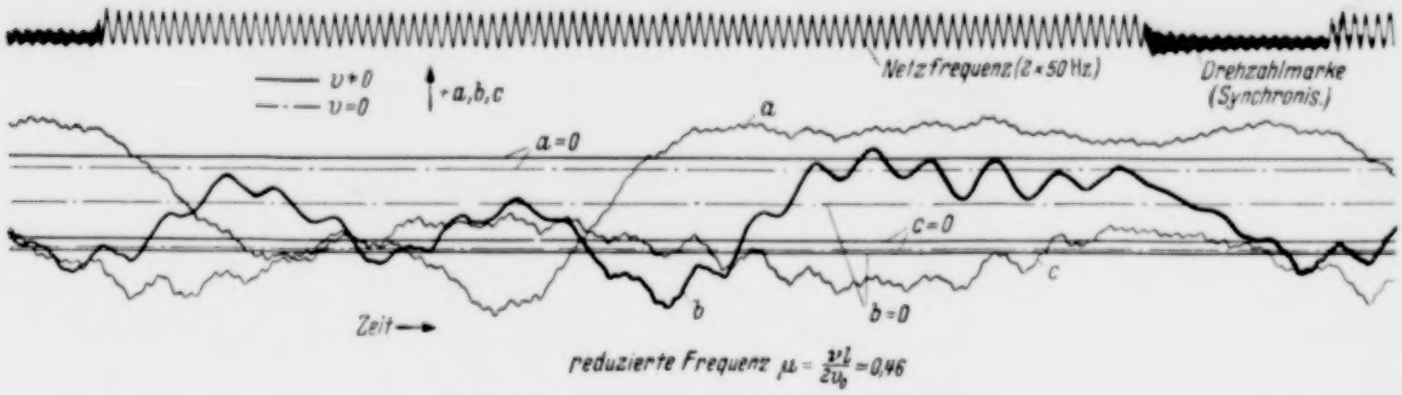


Abb. 9. Dreikomponentenmessung. Datum: 14. 12. 59.

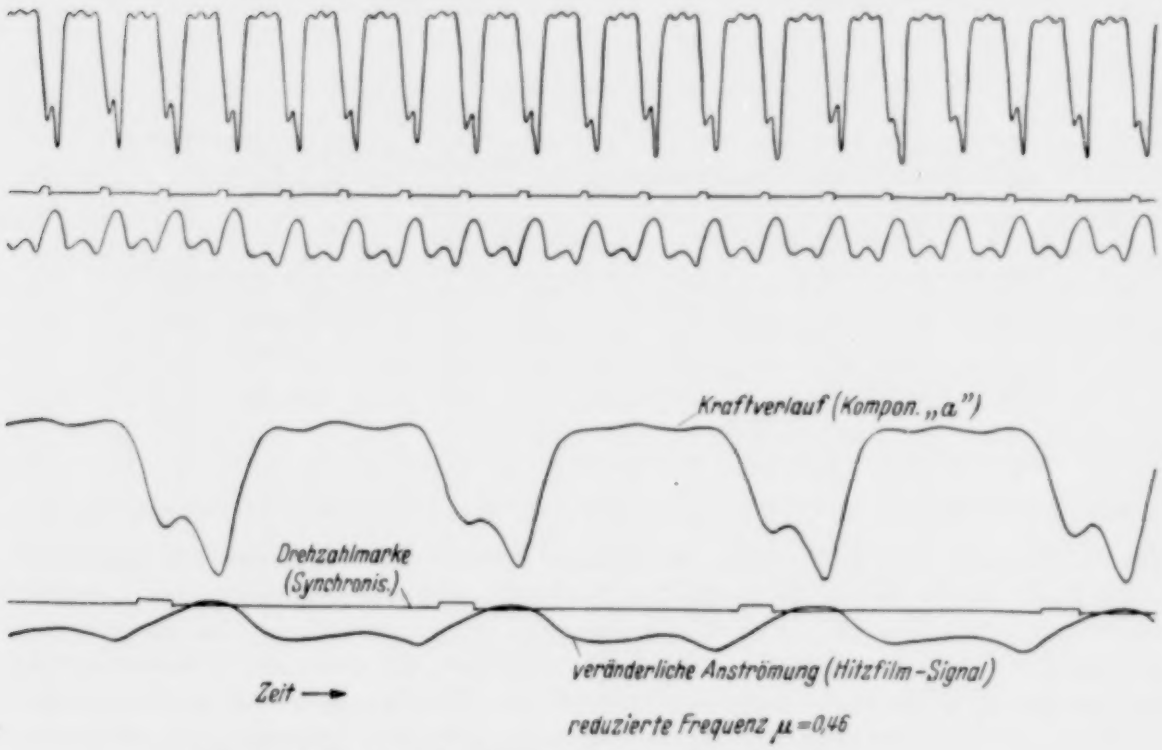


Abb. 10. Kraftverlauf bei periodisch veränderlicher Anströmung.

der Abwindamplituden lassen sich daher wohl nur mit einer verminderten Zirkulation am Schlagflügel selbst erklären. Die Wassertiefe über bzw. unter dem Schlagflügel (540 mm bzw. 600 mm) war nicht viel größer als die Profillänge des Schlagflügels, so daß mit einem verhältnismäßig starken Oberflächen- bzw. Bodeneinfluß auf die Druckverteilung gerechnet werden muß. Offenbar liegt hierin der Grund für die schlechte Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Eine nähere Untersuchung dieser Einflüsse wurde nicht vorgenommen, da hier in erster Linie die tatsächlich vorhandenen Abwindamplituden des Schlagflügels von Interesse waren.

b) Kleiner Schlagflügel. Die Ergebnisse der Messungen der Phasenwinkel zwischen der Schlagbewegung und dem zeitlichen Verlauf der Normalkraft sind in der Abb. 12 dargestellt. Sie wurden mit Hilfe eines harmonischen Analysators aus den Amplituden und Phasendifferenzen der

an dem in Luft und im Wasser schwingenden Schlagflügel gemessenen Kraftverläufe bestimmt. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch kann als gut bezeichnet werden. Eine Abhängigkeit von der Schlagamplitude scheint bei genügend kleinen Amplituden nicht zu bestehen. Die Abweichungen bei der großen Schlagamplitude ($z_0/l = 0{,}20$) ist möglicherweise die Folge eines Nullpunktfehlers, da sowohl bei der kleinen als auch bei der großen reduzierten Frequenz die Beträge der Abweichungen etwa gleich sind, die Tendenz jedoch mit der Theorie übereinstimmt.

c) **Feststehender Tragflügel.** *1. Kraftwirkungen.* Zunächst war es erforderlich, die Originalaufzeichnungen der Komponentengeber der Sechskomponentenwaage zu linearisieren, da wegen der

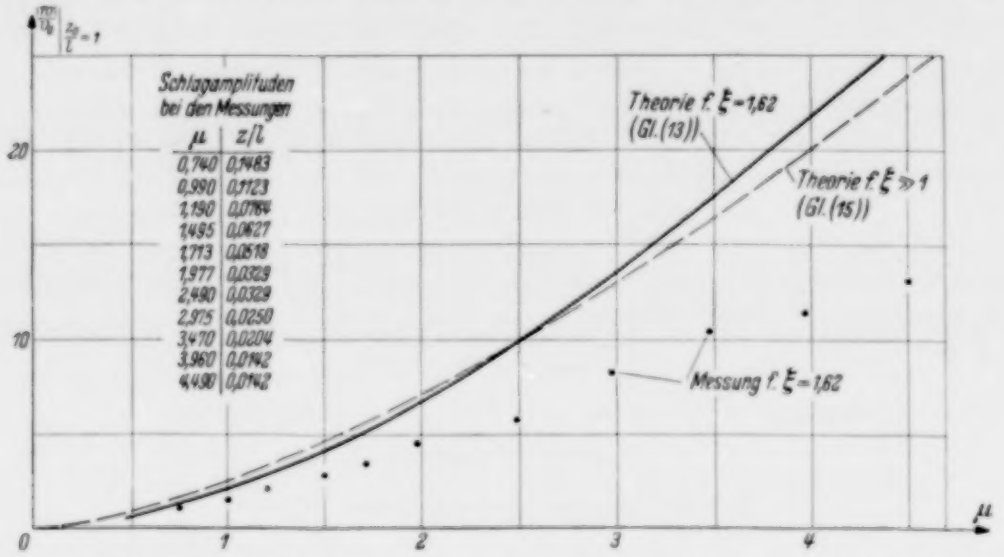


Abb. 11. Schlagflügel-Abwind ($\xi > 1$), $A = \infty$. $v_0 = 1{,}29 \div 1{,}44$ m/sek. Datum: 23. 9.—23. 11. 59.

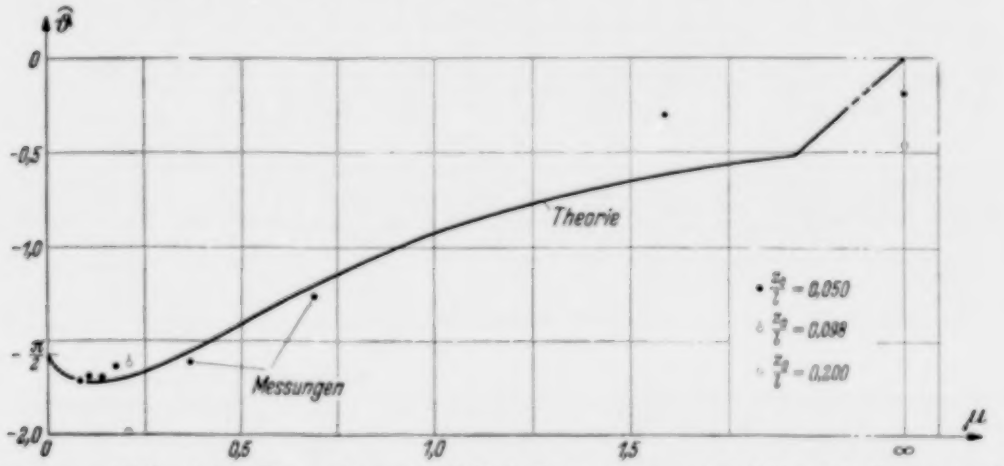


Abb. 12. Phasenwinkel zwischen Weg- u. Normalkraft-Verlauf, $A = \infty$. $v_0 = 0 \div 3{,}14$ m/sek. Datum: 1.—2.2.60.

Größe der Kräfte zum Teil nicht mehr im linearen Bereich der Geberelemente gearbeitet werden konnte. Im Falle des in Abb. 9 dargestellten Kraftverlaufes war eine derartige Linearisierung bei der Komponente *a* erforderlich. Diese Maßnahme wirkte sich derart aus, daß die positiven Amplituden entsprechend den Abweichungen der Gebercharakteristik von einer Geraden vergrößert und die negativen Amplituden verkleinert werden mußten. Die linearisierten Kraftverläufe konnten dann mit Hilfe eines harmonischen Analysators nach Größe und Phasenwinkel analysiert werden. Mit den Ergebnissen der Analyse erfolgte die Bestimmung der Normalkraftamplituden, der Amplituden des Momentes der Normalkraft um die Flügelvorderkante und der mittleren Tangentialkraft (induzierter Widerstand). Sie wurden in der dimensionslosen Form

$$\frac{|c_{Pz}|}{2\pi} = \frac{|P_z|}{q\,b\,l\,\dfrac{|w|}{v_0}},$$

$$\frac{|c_{MyE}|}{2\pi} = -\frac{|M_{yE}|}{q\,b\,l^2\,\dfrac{|w|}{v_0}},$$

$$\frac{c_{Pxm}}{\pi} = \frac{P_{xm}}{q\,b\,l\left(\dfrac{|w|}{v_0}\right)^2}$$

in den Abb. 13, 14 und 15 in Abhängigkeit von der reduzierten Frequenz dargestellt. Die Ergebnisse theoretischer Berechnungen [Abschnitt 5, b), Gl. (22), Gl. (23), (23a) und Gl. (25)] wurden ebenfalls in die Abbildungen eingetragen.

Die gemessenen Normalkraftamplituden (Abb. 13) liegen in dem ganzen erfaßten Bereich der reduzierten Frequenz um einen nahezu konstanten Betrag über den für große Spannweite geltenden theoretisch berechneten Werten, obwohl bei dem endlichen Seitenverhältnis des Tragflügelmodelles eher das gegenteilige Verhalten zu erwarten war. Selbstverständlich ist hier mit einer größeren Ungenauigkeit im Vergleich zu Messungen am stationär angeströmten Profil zu rechnen, schon

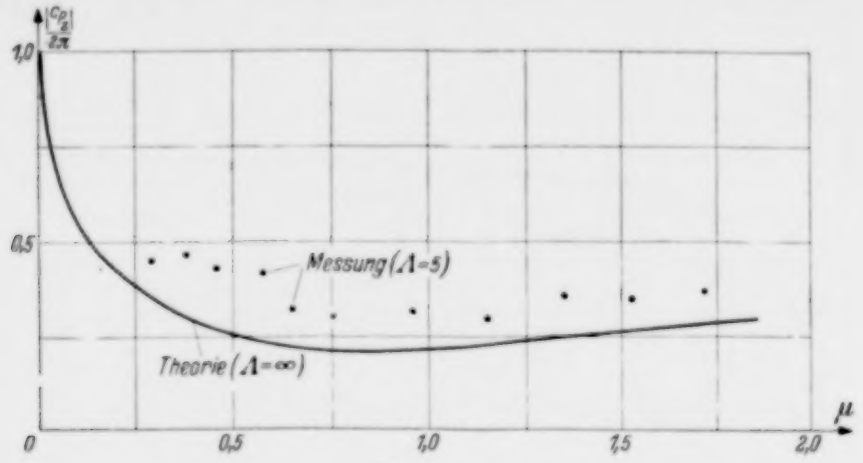


Abb. 13. Dimensionslose Normalkraftamplituden $\frac{|c_{P_z}|}{2\pi}$. $v_0 = 1{,}29 \div 1{,}44$ m/sek. Datum: 14. 12.—21. 12. 59.

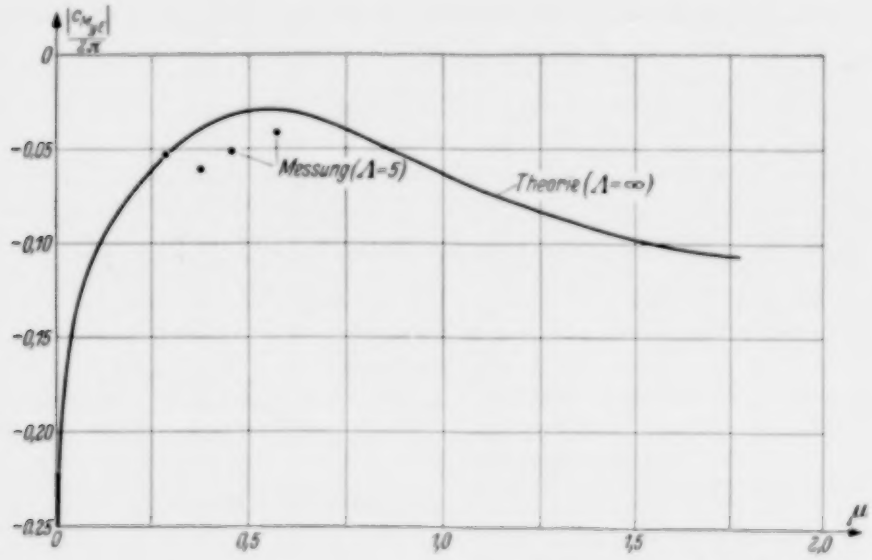


Abb. 14. Dimensionsloses Moment der Normalkraft, bezogen auf die Eintrittskante $\frac{|c_{M_y E}|}{2\pi}$. $v_0 = 1{,}29 \div 1{,}44$ m/sek. Datum: 14. 12.—21. 12. 59.

allein deswegen, weil in der vorliegenden Form die Meßergebnisse als Quotienten von je zwei gemessenen Amplituden (Kraft- und Normalgeschwindigkeitsamplitude) auftreten. Hierdurch lassen sich nur stärkere Streuungen, keineswegs aber nahezu konstante Vergrößerungen der mittleren Werte, erklären. Eine leichte Vergrößerung der Normalkraft kann u. U. auf die endliche Profildicke zurückgeführt werden. Gänzlich ungeklärt ist der Einfluß nichtlinearer Zusammenhänge zwischen Zirkulation und induzierter Geschwindigkeit, auf die bei den theoretischen Rechnungen keine Rücksicht genommen wurde, die aber bei den verwendeten hydrodynamischen Anstellwinkeln von $\alpha_{h_y} \approx \pm 9^\circ$ ($|w|/v_0 \approx 0{,}16$) schon eine Rolle spielen können. Auch läßt sich der Einfluß der zweifellos starken periodischen Randwirbel auf die Druckverteilung nicht genau voraussagen.

Das dimensionslose Moment (Abb. 14) der Normalkraft um die Eintrittskante des Tragflügels konnte infolge meßtechnischer Schwierigkeiten nur für kleine reduzierte Frequenzen ermittelt werden und ist seinem Betrag nach größer als es die theoretischen Rechnungen erwarten lassen. Diese Differenz kann jedoch mit der ebenfalls nicht mit der Theorie übereinstimmenden Normalkraft begründet werden.

In der Abb. 15 ist die mittlere Tangentialkraft (zeitlicher Mittelwert des induzierten Widerstandes) als Funktion der reduzierten Frequenz dargestellt. Im Gegensatz zu den Ergebnissen der Normalkraft- und der Momentenmessung kann die Übereinstimmung der mittleren Tangentialkraft mit den theoretisch berechneten Werten als gut bezeichnet werden. Allerdings ist hier die Auswertung einfacher, da es sich, wie schon gesagt, um einen zeitlichen Mittelwert handelt. Die Streuungen der Meßwerte dürften eine Folge der quadratischen Abhängigkeit von den Amplituden des instationären Strömungsfeldes sein.

Das Verhältnis von Tangential- und Normalkraft, die sogenannte Gleitzahl des Tragflügels, die im Gegensatz zum stationären Fall bei periodisch instationären Vorgängen negative Werte hat, ist

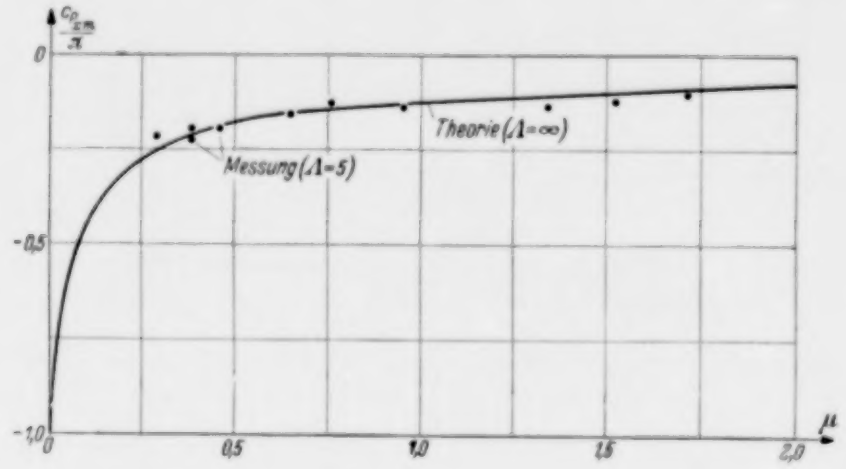


Abb. 15. Dimensionslose Tangentialkraft (zeitlicher Mittelwert) $\frac{c_{P_{x\,m}}}{\pi}$. $v_0 = 1{,}29 \div 1{,}44$ m/sek.

Datum: 14. 12.—21. 12. 59.

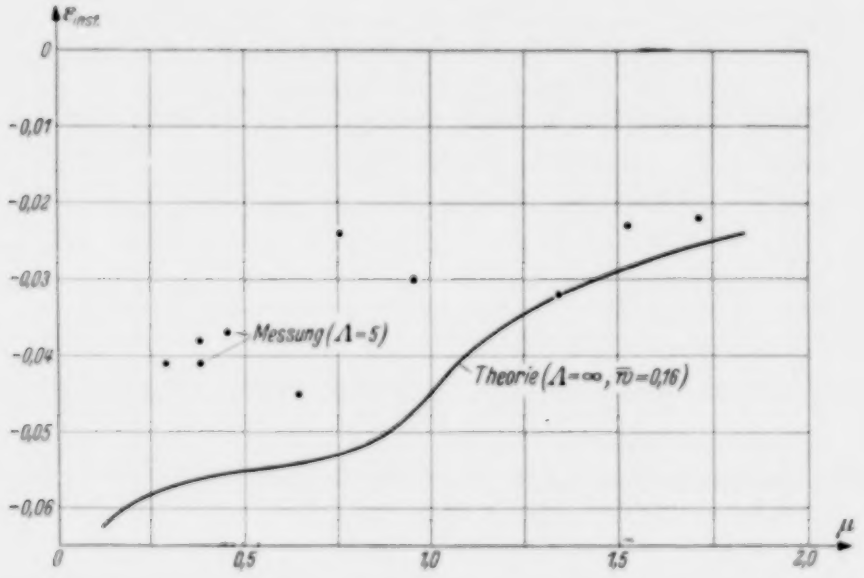


Abb. 16. Instationäre Gleitzahl $\varepsilon_{inst} = \overline{w}\,\frac{c_{P_{x\,m}}}{|c_{P_z}|}$. $v_0 = 1{,}29 \div 1{,}44$ m/sek.

Datum: 14. 12.—21. 12. 59.

in der Abb. 16 dargestellt. Die starke Streuung der Meßwerte ist darauf zurückzuführen, daß die Tangentialkraft vom Quadrat, die Normalkraft dagegen nur von der ersten Potenz des hydrodynamischen Anstellwinkels abhängig ist. Aus versuchstechnischen Gründen war es jedoch nicht möglich, immer mit den gleichen Werten $\overline{w}$ zu arbeiten.

Die auf den hydrodynamischen Anstellwinkel bezogene instationäre Gleitzahl, die in Abb. 17 als Funktion der reduzierten Frequenz angegeben ist, weicht im Bereich kleiner μ stark von den theoretisch berechneten Werten [Gl. (28) mit Gl. (22) und (25)] ab, was auf den großen Unterschied zwischen den theoretisch berechneten und den gemessenen Normalkraftamplituden zurückzuführen ist,

2. Phasenwinkel. In der Abb. 18 sind die Phasenwiakel der mit der an der Tragflügeleintrittskante angebrachten Hitzfilmsonde bestimmten Extremwerte der periodisch instationären Anströmung bezüglich des als Synchronisierung dienenden Drehzahlkontaktes des Schlagflügelantriebes angegeben. Die Abstände x_E sind die bei den Versuchen eingestellten Entfernungen zwischen Schlagflügelaustritts- und Tragflügeleintrittskante.

Mit Hilfe der Ergebnisse der harmonischen Analyse des Kraftverlaufes am Tragflügel wurden dann die Phasenwinkel der Kraftextremwerte bezüglich der Synchronisierungsmarken bestimmt.

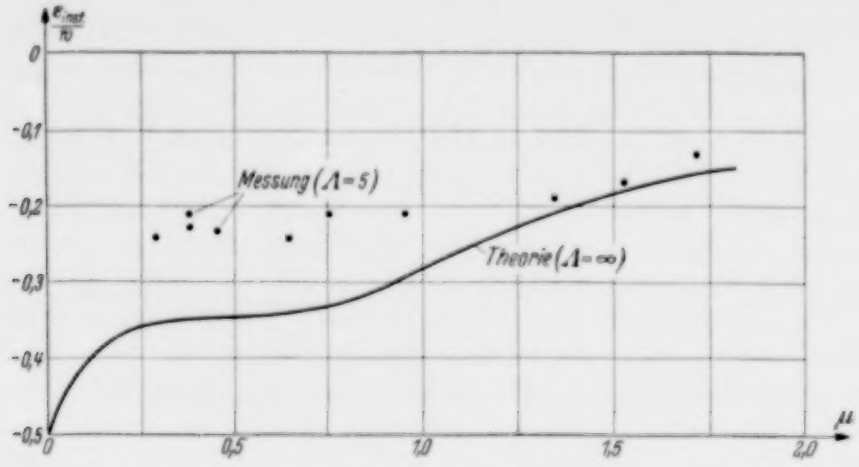


Abb. 17. Instationäre Gleitzahl $\varepsilon_{inst}/\overline{w}$ (bezogen auf die Normalgeschwindigkeitsamplitude $\overline{w}$). $v_0 = 1{,}29 \div 1{,}44$ m/sek. Datum: 14. 12.—21. 12. 59.

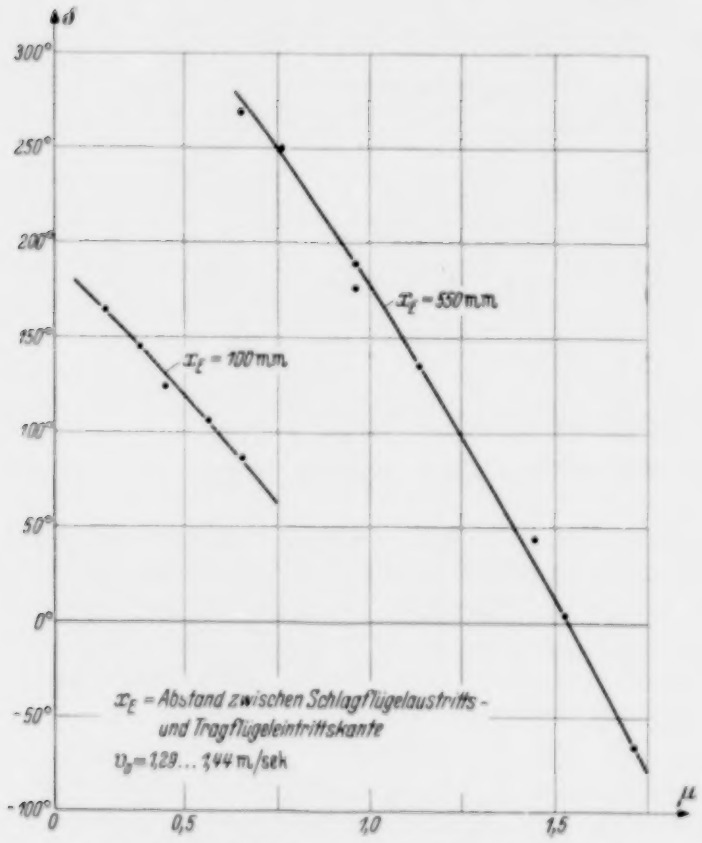


Abb. 18. Phasenwinkel des $\ominus$-Extremwerte der veränderlichen Anströmung bezügilch der Synchronisierungsmarken. Datum: 6. 1. 1960.

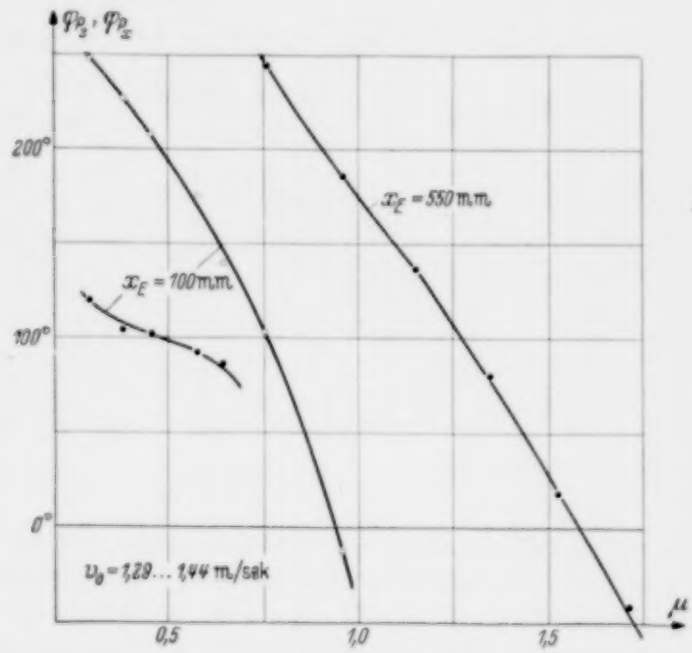


Abb. 19. Phasenwinkel der Kraft-Extremwerte bezüglich der Synchronisierungsmarken. Datum: 14. 12.—21. 12. 59.

Sie sind in der Abb. 19 dargestellt. Aus den zeitlichen Kraftverläufen und dem zeitlichen Verlauf der instationären Anströmung konnten nunmehr die Phasenwinkel zwischen Anströmungs- und Kraftverlauf ermittelt werden. Sie sind, getrennt für Normalkraft und Tangentialkraft, in den Abb. 20 und 21 dargestellt. Um einen Vergleich mit den theoretisch berechneten Werten zu ermöglichen [Gl. (22), (26)] war es notwendig, die in Abb. 18 angegebenen Phasenwinkel δ, die die zeitlichen Änderungen der Anströmgeschwindigkeit an der Tragflügeleintrittskante darstellen, umzurechnen auf die Verhältnisse am Ort der Profilmitte. Mit Ausnahme des Bereiches kleiner μ-Werte ist die Übereinstimmung von Theorie und Experiment zufriedenstellend.

3. Rückwirkung des Tragflügels auf das Strömungsfeld. An der Oberfläche des Tragflügels verschwinden infolge seiner Undurchdringlichkeit die Normalkomponenten der Geschwindigkeit. In einem instationären Strömungsfeld mit periodischen Geschwindigkeitskomponenten normal zur Tragflügeloberfläche bedeutet das, daß die Amplituden dieser Normalkomponenten mit zunehmendem Abstand von der Eintrittskante des Tragflügels mehr oder weniger vermindert werden. Die Abbn. 3b u. 3c zeigten diesen Vorgang deutlich. Es tritt hierbei eine Energietransformation ein, derart, daß von dem Tragflügel dem instationären Strömungsfeld Energie entzogen wird, die sich in einem negativen Widerstand des Tragflügels bemerkbar macht, d. h. in Vortriebsenergie umgesetzt wird. Ein Maß für diese Energieübertragung ist das Verhältnis der Amplituden des instationären Strö-

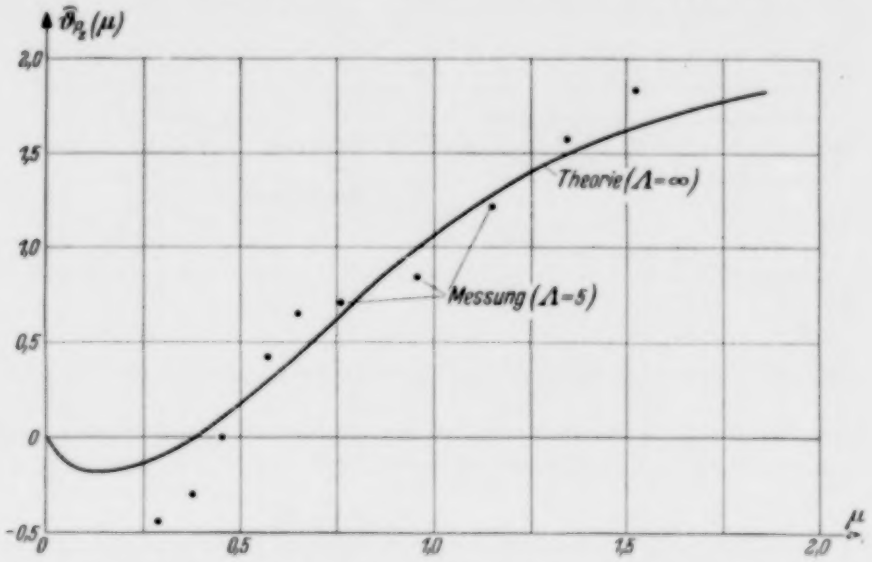


Abb. 20. Phasenwinkel der Normalkraft $P_z(\mu)$. $v_0 = 1{,}29 \div 1{,}44$ m/sek. Datum: 14. 12.—21. 12. 59.

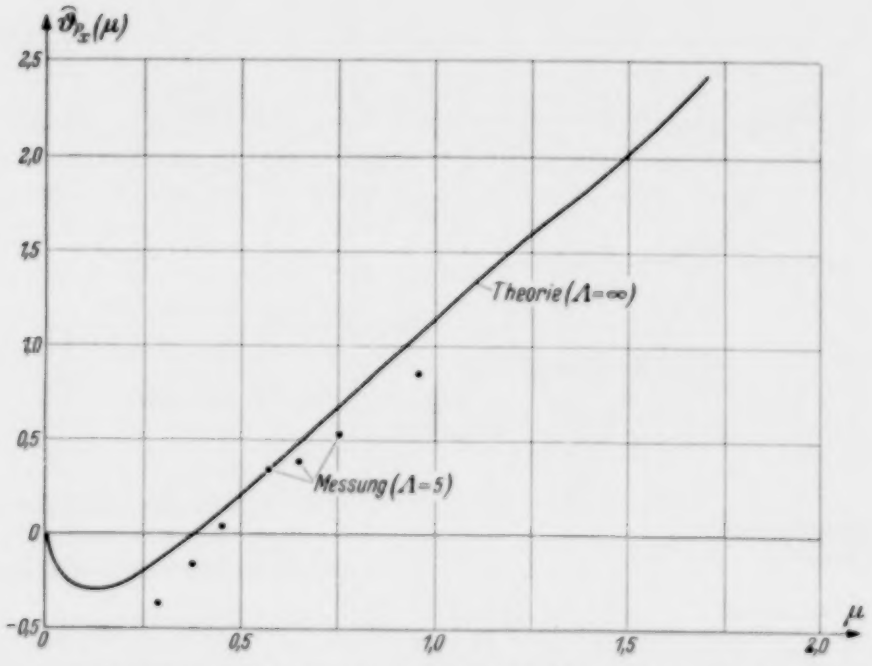


Abb. 21. Phasenwinkel der Tangentialkraft $P_x(\mu)$. $v_0 = 1{,}29 \div 1{,}44$ m/sek. Datum: 14. 12.—21. 12. 59.

mungsfeldes vor und hinter dem Tragflügel. Man kann hier von einem instationären Gütegrad des Profiles sprechen, der den Wert 1 erreicht, wenn die Amplituden der Geschwindigkeitsnormalkomponenten vollständig abgebaut werden und ihn in der Form

$$\eta_{inst} = 1 - \left(\frac{\bar{w}_1}{\bar{w}}\right)^2$$

definieren [Gl. (27)], wenn die Amplituden vor dem Tragflügel mit $\bar{w}$ und die Amplituden hinter dem Tragflügel mit $\bar{w}_1$ bezeichnet werden. Die Abb. 22 zeigt die durch Messung bestimmten und die theoretisch berechneten Gütegrade. Wie aus dem Diagramm zu ersehen ist, liegen die durch

Messung bestimmten Gütegrade bei kleinen reduzierten Frequenzen höher als die theoretisch berechneten Werte. Das deutet darauf hin, daß die Geschwindigkeitsnormalkomponenten bei kleinen μ-Werten stärker abgebaut werden, als es mit den linearen Ansätzen der Theorie erfaßt wird.

4. Zusammenfassung. Es wurde über Messungen an zwei schwingenden Tragflügeln (Schlagflügel) in gleichförmiger Grundströmung und an einem feststehenden Tragflügel in periodisch instationärer Strömung berichtet. Diese Messungen sollten einige grundsätzliche Fragen klären, die im Zusammenhang mit der Ermittlung der an schwingenden Schiffspropellern wirksamen hydrodynamischen Massen und Dämpfungen, der hydrodynamischen Erregung von Schiffswellenanlagen infolge ungleichförmigen Zustromes zum Propeller und der hydrodynamischen Kraftwirkungen an den Tragwerken von Tragflügelbooten bei Fahrt im Seegang auftreten.

Die an einem zwischen zwei senkrechten Wänden schwingenden Tragflügel durchgeführten Messungen des Phasenwinkels zwischen Bewegungs- und Kraftverlauf zeigten eine gute Übereinstimmung mit den für diesen Fall theoretisch berechneten Werten. Dieses Ergebnis ist im Hinblick auf die an schwingenden Schiffspropellern auftretenden hydrodynamischen Kraftwirkungen von Bedeutung, weil die Größe des Phasenwinkels bei der Berechnung der hydrodynamischen Dämpfungen und der hydrodynamischen Massen eine wesentliche Rolle spielt*.

Messungen der Größe und des zeitlichen Verlaufes der an einem ruhenden Tragflügel mit dem Seitenverhältnis $\Lambda = 5$ bei periodisch instationärer Anströmung auftretenden Kraftwirkungen

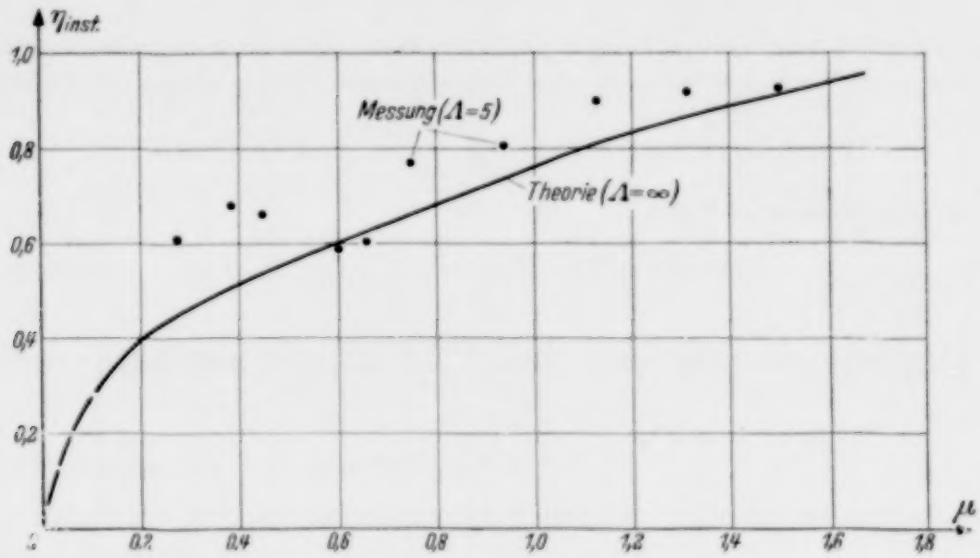


Abb. 22. Instationärer Gütegrad. $v_0 = 1{,}29 \div 1{,}44$ m/sek. Datum: 23. 9.—23. 11. 59 und 19. 1.—21. 1. 60.

ergaben hinsichtlich ihrer Größe und ihres Verlaufes in Abhängigkeit von der reduzierten Frequenz im allgemeinen eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit theoretischen Rechnungen, die für große Spannweite des Tragflügels (ebener Fall) durchgeführt wurden. Merkliche Differenzen zwischen Theorie und Experiment zeigten sich bei allen reduzierten Frequenzen im Fall der Normalkraftamplituden und im Bereich kleiner reduzierter Frequenzen, im Fall der Tangentialkraft sowie bei den Phasenwinkeln der Normal- und Tangentialkraft bezüglich der Änderungen der Anströmung. Für die, verglichen mit der Theorie, zu großen Normalkraftamplituden kann keine befriedigende Erklärung gegeben werden, dagegen dürften die bei kleinen Werten der reduzierten Frequenz festgestellten Abweichungen der übrigen durch Messung bestimmten Größen von den theoretischen Werten eine Folge des endlichen Seitenverhältnisses des Tragflügels sein. Dieses macht sich um so stärker bemerkbar, je kleiner die reduzierte Frequenz ist[1].

Die ursprünglich vorgesehenen Messungen mit systematisch verkleinertem Seitenverhältnis des Tragflügels konnten im Rahmen des im Abschnitt **2** beschriebenen Versuchsprogrammes nicht mehr vorgenommen werden. Sie werden jedoch, da für die Übertragung der Ergebnisse der Versuche an einfachen Tragflügeln auf die Flügel eines Schraubenpropellers insbesondere kleine Seitenverhältnisse interessant sind, zu gegebener Zeit mit verbesserten Meßmethoden nachgeholt werden.

* Vgl. Fußnote 1 von Seite 350.

[1] *H. Schwanecke*, Berechnung des induzierten Geschwindigkeitsfeldes eines gebundenen Stabwirbels endlicher Länge mit zeitlich veränderlicher Wirbelstärke bei gleichförmiger Queranströmung, VWS-Bericht Nr. 140 (1959) (unveröffentlicht).

Die experimentelle Bestimmung des instationären Gütegrades des Tragflügels, der ein Maß für die dem instationären Strömungsfeld entnommene Energie ist, zeigte, daß schon bei verhältnismäßig kleinen reduzierten Frequenzen, d. h. bei verhältnismäßig großen Wellenlängen der normal zum Tragflügel gerichteten periodischen Zusatzgeschwindigkeiten, ein merklicher Energieentzug eintritt. Die experimentell bestimmten Werte liegen bei kleinen reduzierten Frequenzen zum Teil erheblich über den mit Hilfe eines einfachen linearen Abklingungsgesetzes ermittelten Werten der Theorie.

Abschließend möchte der Verfasser nicht versäumen, Herrn Prof. Dr. *Schuster* für seine verständnisvolle Förderung der Arbeiten, sowie Herrn Dipl.-Ing. *Dernedde* und Herrn *Strube* für ihre Hilfe bei der Durchführung und der Auswertung der Messungen zu danken.

5. Anhang. a) Ergebnisse der ebenen Theorie des Schlagflügels in gleichförmiger Strömung. Die an einem Tragflügel mit großer Spannweite bei schwingender Bewegung auftretenden hydrodynamischen Kraftwirkungen können mit Hilfe der bekannten Theorien von *Theodorsen*[1], *v. Kármán* und *Sears*[2], *Küßner*[3] und *Küßner* und *Schwarz*[4] unter den üblichen Voraussetzungen berechnet werden. Es werden hier nur die Ergebnisse und auch nur soweit sie für die im Hauptteil der vorliegenden Arbeit mitgeteilten experimentellen Untersuchungen von Bedeutung sind, wiedergegeben.

Lautet das Bewegungsgesetz der Profilsehne des Schlagflügels

$$z(t) = z_0 \exp(i\,\nu\,t)\,,$$

so hat der Auftrieb eines aus einem Flügel großer Spannweite herausgeschnittenen Streifens mit der Breite b in der vom Verfasser bevorzugten *Küssner*schen Darstellung die Größe[5]

$$P_z = q\,b\,z_0\,2\,\pi\,\mu\,\{T''(\mu) + \mu - i\,[1 + T'(\mu)]\}\exp(i\,\nu\,t) \tag{1}$$

oder, in etwas verallgemeinerter Form,

$$P_z = q\,b\,z_0\,2\,\pi\,|F(\mu)|\exp(i\,\vartheta_z(\mu) + i\,\nu\,t) \tag{1a}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} |F(\mu)| &= \mu\,\sqrt{1 + \mu^2 + |T(\mu)|^2 + 2\,[T'(\mu) + \mu\,T''(\mu)]} \\ \text{und}\qquad \vartheta_z(\mu) &= -\operatorname{arc\,tg}\frac{1 + T'(\mu)}{\mu + T''(\mu)}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Das Moment des Auftriebes, bezogen auf den Sehnenmittelpunkt, hat die Größe

$$M_{y_0} = q\,l\,b\,z_0\,\pi\,\frac{\mu}{2}\,\{T''(\mu) - i\,[1 + T'(\mu)]\}\exp(i\,\nu\,t)\,. \tag{3}$$

Der induzierte Widerstand ergibt sich zu

$$P_x = P_{xm} - q\,b\,\frac{z_0^2}{l}\,\pi\,\mu^2\,\{T''^2(\mu) - [1 + T'(\mu)]^2 - i\,2\,T''(\mu)\,[1 + T'(\mu)]\}\exp(i\,2\,\nu\,t) \tag{4}$$

mit dem zeitlichen Mittelwert

$$P_{xm} = -\,q\,b\,\frac{z_0^2}{l}\,\pi\,\mu^2\,[1 + 2\,T'(\mu) + |T(\mu)|^2]\,. \tag{5}$$

Der Vollständigkeit halber wird auch der Ausdruck für die aufgenommene Leistung angegeben:

$$L = L_m + q\,v_0\,b\,\frac{z_0^2}{l}\,2\,\pi\,\mu^2\,\{1 + T'(\mu) + i\,[\mu + T''(\mu)]\}\exp(i\,2\,\nu\,t) \tag{6}$$

[1] *Th. Theodorsen*, A general theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter, NACA-Rep. No. 496 (1934).

[2] *Th. v. Kármán* u. *W. R. Sears*, Journ. Aero. Sc. 5 (1938) S. 379.

[3] *H. G. Küßner*, Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln, Luftf.-Forschung 13 (1936) S. 410.

[4] *H. G. Küßner* u. *L. Schwarz*, Der schwingende Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenem Ruder, Luftf.-Forschg. 17 (1940) S. 337.

[5] Bezüglich der gewählten Bezeichnungen vgl. Abschnitt 5c).

mit dem zeitlichen Mittelwert

$$L_m = q\, v_0\, b\, \frac{z_0^2}{l}\, 2\pi\, \mu^2\, [1 + T'(\mu)]\,. \tag{7}$$

Der Abwind des Schlagflügels ergibt sich in bekannter Weise zu

$$\frac{w}{v_0} = -\frac{z_0\,\mu}{l\,\pi}\left[\int_{x_1=-1}^{+1} \frac{g(x_1)}{\xi - x_1}\, dx_1 - i\,\mu \int_{x_1=-1}^{+1} g(x_1)\exp(i\,\mu\, x_1) \int_{x=x_1}^{\infty} \frac{\exp(-i\,\mu\, x)}{\xi - x}\, dx\, dx_1\right] \exp(i\,\nu\, t) \tag{8}$$

mit

$$g(x_1) = \{T''(\mu) - i\,[1 + T'(\mu)]\}\sqrt{\frac{1 - x_1}{1 + x_1}} + 2\,\mu\,\sqrt{1 - x_1^2}\,. \tag{9}$$

Das uneigentliche Interal in (8) hat die Lösung

$$\int_{x=x_1}^{\infty} \frac{\exp(-i\,\mu\, x)}{\xi - x}\, dx \equiv -\exp(-i\,\mu\,\xi) \int_{t=-\mu(\xi - x_1)}^{+\infty} \frac{\exp(-i\,t)}{t}\, dt$$

$$= \exp(-i\,\mu\,\xi)\left(C_i\,[\mu\,(\xi - x_1)] + i\left\{\frac{\pi}{2} + S_i\,[\mu\,(\xi - x_1)]\right\}\right). \tag{10}$$

Wird

$$\left.\begin{aligned} C_i\,[\mu\,(\xi - x_1)] &= \frac{\sin\mu\,(\xi - x_1)}{\mu\,(\xi - x_1)} + f_c\,[\mu\,(\xi - x_1)] \\ \text{und}\qquad S_i\,[\mu\,(\xi - x_1)] &= \frac{\pi}{2} - \frac{\cos\mu\,(\xi - x_1)}{\mu\,(\xi - x_1)} + f_s\,[\mu\,(\xi - x_1)] \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

gesetzt, so folgt aus (10)

$$\int_{x=x_1}^{\infty} \frac{\exp(-i\,\mu\, x)}{\xi - x}\, dx = i\exp(-i\,\mu\,\xi)\left\{\pi - \frac{\exp(i\,\mu\,(\xi - x_1))}{\mu\,(\xi - x_1)} - i\,f_c\,[\mu\,(\xi - x_1)] + f_s\,[\mu\,(\xi - x_1)]\right\}. \tag{12}$$

Damit lautet die Beziehung für den Abwind [vgl. (8)]

$$\frac{w}{v_0} = -\frac{z_0}{l}\,\mu^2 \exp(i\,\nu\, t - i\,\mu\,\xi)\left(\int_{x_1=-1}^{+1} g(x_1)\exp(i\,\mu\, x_1)\, dx_1 + \frac{1}{\pi}\int_{x_1=-1}^{+1} g(x_1)\exp(i\,\mu\, x_1)\,\{f_s\,[\mu\,(\xi - x_1)] - i\,f_c\,[\mu\,(\xi - x_1)]\}\, dx_1\right) \tag{13}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} f_s\,[\mu\,(\xi - x_1)] &= S_i\,[\mu\,(\xi - x_1)] - \frac{\pi}{2} + \frac{\cos\mu\,(\xi - x_1)}{\mu\,(\xi - x_1)}\,, \\ f_c\,[\mu\,(\xi - x_1)] &= C_i\,[\mu\,(\xi - x_1)] - \frac{\sin\mu\,(\xi - x_1)}{\mu\,(\xi - x_1)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Für $\mu\,(\xi - x_1) \gg 1$ verschwinden die Ausdrücke (14) und der Abwind ergibt sich zu

$$\frac{w}{v_0} = -\frac{z_0}{l}\,\mu^2 \exp(i\,\nu\, t - i\,\mu\,\xi) \int_{x_1=-1}^{+1} g(x_1)\exp(i\,\mu\, x_1)\, dx_1\,. \tag{15}$$

Mit $g(x_1)$ nach (9) lautet die Lösung des Integralausdruckes in (15)

$$\int_{x_1=-1}^{+1} g(x_1)\exp(i\,\mu\, x_1)\, dx_1 = \pi\,(J_0(\mu)\, T''(\mu) + J_1(\mu)\,[1 - T'(\mu)] - i\,\{J_0(\mu)\,[1 + T'(\mu)] + J_1(\mu)\, T''(\mu)\})\,. \tag{16}$$

Nimmt die reduzierte Frequenz μ große Werte an, so vereinfacht sich (16) wegen

$$T''(\mu)\,,\ T'(\mu) \to 0\,,$$

$$J_0(\mu) \approx \frac{\cos\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\mu\,\frac{\pi}{2}}}\,, \qquad J_1(\mu) \approx \frac{\cos\left(\mu - \frac{3}{4}\,\pi\right)}{\sqrt{\mu\,\frac{\pi}{2}}} \qquad \text{für } \mu \gg 1$$

zu

$$\int_{x_1=-1}^{+1} g(x_1)\,\exp\,(i\,\mu\,x_1)\,dx_1 \approx \sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\,[-\cos\mu + \sin\mu - i\,(\cos\mu + \sin\mu)]\,. \tag{17}$$

Für $\mu \gg 1$ und $\xi \gg 1$ hat dann der Abwind die Größe

$$\frac{w}{v_0} \approx -\frac{z_0}{l}\sqrt{\mu^3\,\pi}\,[-\cos\mu + \sin\mu - i\,(\cos\mu + \sin\mu)]\,\exp\,(i\,\nu\,t - i\,\mu\,\xi) \tag{18}$$

mit der Amplitude

$$\frac{|w|}{v_0} \approx \frac{z_0}{l}\sqrt{2\,\pi\,\mu^3}\,. \tag{19}$$

b) Ergebnisse der ebenen Theorie des ruhenden oder gleichförmig bewegten Tragflügels in periodisch veränderlicher Strömung. Die hydrodynamischen Kraftwirkungen, die an einem ruhenden oder sich gleichförmig bewegenden Tragflügel großer Spannweite bei periodischer Änderung des hydrodynamischen Anstellwinkels auftreten, können mit Hilfe einer vom Verfasser entwickelten und auf der bereits erwähnten Arbeit* aufbauenden Theorie[1] berechnet werden. Die Ergebnisse dieser theoretischen Untersuchungen, die für die Auswertung und die physikalische Deutung der im Abschnitt 3 mitgeteilten Meßergebnisse wichtig sind, werden hier in Kürze mitgeteilt.

Der Anstellwinkel des als nicht gewölbt angenommenen Tragflügels ist gegeben durch die Beziehung

$$\alpha(x, t) = \alpha_0 + \frac{1}{v_0}\sum_{n=1}^{\infty}{}' |w_n|\,\exp\,(i\,n\,\nu\,t - i\,n\,\mu\,x)\,, \tag{20}$$

wobei der Summenausdruck der durch die periodischen Änderungen der Strömungsrichtung hervorgerufene zusätzliche hydrodynamisch bedingte Anstellwinkel ist. Da die im Abschnitt 2 beschriebenen Messungen an einem Tragflügel mit dem mittleren Anstellwinkel Null in einem instationären Strömungsfeld mit nahezu rein sinusförmigem Verlauf der normal zum Tragflügel gerichteten Störgeschwindigkeiten durchgeführt wurden, vereinfacht sich der Ausdruck für den Anstellwinkel zu

$$\alpha(x, t) = \frac{|w|}{v_0}\,\exp\,(i\,\nu\,t - i\,\mu\,x)\,. \tag{20a}$$

Mit einem Abklingungsfaktor σ, der in der zitierten Arbeit näher beschrieben wird, ergibt sich für einen hydrodynamischen Anstellwinkel entsprechend (20a) die Normalkraft des Tragflügels zu

$$P_z = q\,b\,l\,\frac{|w|}{v_0}\,\pi\left(J_0(\mu)\,[1 + T'(\mu)\,(1-\sigma)] + J_1(\mu)\left[T''(\mu)\,(1-\sigma) - \frac{3 - T'(\mu)}{2\,\mu}\,\sigma\right]\right.$$
$$\left. + i\left\{J_0(\mu)\,T''(\mu)\,(1-\sigma) + J_1(\mu)\left[T'(\mu)\,(\sigma - 1) + 1 + \frac{T''(\mu)}{2\,\mu}\,\sigma\right]\right\}\right)\exp\,(i\,\nu\,t) \tag{21}$$

bzw.

$$P_z = q\,b\,l\,\frac{|w|}{v_0}\,|c_{P_z}|\,\exp\left[i\,\vartheta_{P_z}(\mu) + i\,\nu\,t\right] \tag{21a}$$

---

* Siehe Fußnote 3 von Seite 364.

[1] *H. Schwanecke*, Schiffstechnik 5 (1958) S. 97.

mit

$$\left.\begin{aligned} |c_{P_z}| = \pi \Big\{ & J_0(\mu)^2 \left\{[1 + T'(\mu)\,(1-\sigma)]^2 + T''^2(\mu)\,(1-\sigma)^2\right\} + J_1^2(\mu) \left\{\left[T''(\mu)\,(1-\sigma) - \frac{3 - T'(\mu)}{2\,\mu}\,\sigma\right]^2 + \left[T'(\mu)\,(\sigma-1) + 1 + \frac{T''(\mu)}{2\,\mu}\,\sigma\right]^2\right\} \\ & + 2\,J_0(\mu)\,J_1(\mu) \left\{(1 + T'(\mu)\,(1-\sigma))\left[T''(\mu)\,(1-\sigma) - \frac{3 - T'(\mu)}{2\,\mu}\,\sigma\right] + T''(\mu)\,(1-\sigma)\left[T'(\mu)\,(\sigma-1) + 1 + \frac{T''(\mu)}{2\,\mu}\,\sigma\right]\right\} \Big\} \\ \vartheta_{P_z}(\mu) = \operatorname{arc\,tg} & \left(\frac{J_0(\mu)\,T''(\mu)\,(1-\sigma) + J_1(\mu)\left[T'(\mu)\,(\sigma-1) + 1 + \frac{T''(\mu)}{2\,\mu}\,\sigma\right]}{J_0(\mu)\,[1 + T'(\mu)\,(1-\sigma)] + J_1(\mu)\left[T''(\mu)\,(1-\sigma) - \frac{3 - T'(\mu)}{2\,\mu}\,\sigma\right]} \right). \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Das Moment der Normalkraft um die Tragflügeleintrittskante hat die Größe

$$M_{y_E} = -\,q\,b\,l^2\,\frac{|w|}{v_0}\,\frac{\pi}{4}\left(J_0(\mu)\,[1 + T'(\mu)\,(1-\sigma)] + J_1(\mu)\left[T''(\mu)\,(1-\sigma) - \frac{5 - T'(\mu)}{2\,\mu}\,\sigma\right] + i\left\{J_0(\mu)\left[T''(\mu)\,(1-\sigma) - \frac{\sigma}{\mu}\right] + J_1(\mu)\left[T'(\mu)\,(\sigma-1) + 1 + \left(\frac{T''(\mu)}{2\,\mu} + \frac{2}{\mu^2}\right)\sigma\right]\right\}\right) \exp(i\,\nu\,t) \quad (23)$$

oder, analog (21a),

$$M_{y_E} = -\,q\,b\,l^2\,\frac{|w|}{v_0}\,|c_{M_{y_E}}|\,\exp\left[i\,\vartheta_{M_{y_E}}(\mu) + i\,\nu\,t\right]. \quad (23a)$$

Die Größe der Tangentialkraft ergibt sich aus der Beziehung

$$\begin{aligned} P_x = P_{xm} - q\,b\,l\left(\frac{|w|}{v_0}\right)^2\frac{\pi}{4}\Big(\Big\{J_0(\mu)\,[1 + T'(\mu)\,(1-\sigma)] + J_1(\mu)\left[T''(\mu)\,(1-\sigma) - \frac{1 - T'(\mu)}{2\,\mu}\,\sigma\right]\Big\}^2 \\ - \left\{J_0(\mu)\,T''(\mu)\,(1-\sigma) + J_1(\mu)\left[T'(\mu)\,(\sigma-1) + 1 + \frac{T''(\mu)}{2\,\mu}\,\sigma\right]\right\}^2 \\ + i\,2\left\{J_0(\mu)\,[1 + T'(\mu)\,(1-\sigma)] + J_1(\mu)\left[T''(\mu)\,(1-\sigma) - \frac{1 - T'(\mu)}{2\,\mu}\,\sigma\right]\right\} \times \\ \times \left\{J_0(\mu)\,T''(\mu)\,(1-\sigma) + J_1(\mu)\left[T'(\mu)\,(\sigma-1) + 1 + \frac{T''(\mu)}{2\,\mu}\,\sigma\right]\right\}\Big) \exp(i\,2\,\nu\,t) \end{aligned} \quad (24)$$

mit

$$\begin{aligned} P_{xm} = -\,q\,b\,l\left(\frac{|w|}{v_0}\right)^2\frac{\pi}{4}\Big(J_0^2(\mu)\,[|T(\mu)|^2\,(1 - 2\,\sigma + \sigma^2) + T'(\mu)\,(2 - 2\,\sigma) + 1] \\ + J_1^2(\mu)\left\{|T(\mu)|^2\left[1 - 2\,\sigma + \sigma^2\left(1 + \frac{1}{4\,\mu^2}\right)\right] + T'(\mu)\left(2\,\sigma - 2 - \frac{\sigma^2}{2\,\mu^2}\right) + T''(\mu)\,\frac{\sigma^2}{\mu} + 1 + \frac{\sigma^2}{4\,\mu^2}\right\} \\ + J_0(\mu)\,J_1(\mu)\left[|T(\mu)|^2\,\frac{1-\sigma}{\mu}\,\sigma + T'(\mu)\,\frac{\sigma^2}{\mu} + T''(\mu)\,(4 - 4\,\sigma) - \frac{\sigma}{\mu}\right]\Big). \end{aligned} \quad (25)$$

Werden auch hier Beiwerte eingeführt, so folgt aus (24)

$$P_x = q\,b\,l\left(\frac{|w|}{v_0}\right)^2\left[c_{P_{xm}} + |c_{P_x}|\,\exp\left(i\,2\,\vartheta_{P_x}(\mu) + i\,2\,\nu\,t\right)\right] \quad (24a)$$

mit

$$c_{P_{xm}} = \frac{P_{xm}}{q\,b\,l\left(\frac{|w|}{v_0}\right)^2} \qquad (P_{xm}\text{ nach (25)})$$

und

$$\vartheta_{P_x}(\mu) = \operatorname{arc\,tg}\left(2\,\frac{\left\{J_0(\mu)\,[1 + T'(\mu)\,(1-\sigma)] + J_1(\mu)\left[T''(\mu)\,(1-\sigma) - \frac{1 - T'(\mu)}{2\,\mu}\,\sigma\right]\right\} \times \left\{J_0(\mu)\,T''(\mu)\,(1-\sigma) + J_1(\mu)\left[T'(\mu)\,(\sigma-1) + 1 + \frac{T''(\mu)}{2\,\mu}\,\sigma\right]\right\}}{\left\{J_0(\mu)\,[1 + T'(\mu)\,(1-\sigma)] + J_1(\mu)\left[T''(\mu)\,(1-\sigma) - \frac{1 - T'(\mu)}{2\,\mu}\,\sigma\right]\right\}^2 - \left\{J_0(\mu)\,T''(\mu)\,(1-\sigma) + J_1(\mu)\left[T'(\mu)\,(\sigma-1) + 1 + \frac{T''(\mu)}{2\,\mu}\,\sigma\right]\right\}^2}\right). \quad (26)$$

Der instationäre Gütegrad, der ein Maß für den Abbau der normal zum Tragflügel gerichteten Geschwindigkeitskomponenten des Strömungsfeldes ist, wurde in Gleichung (61) der zitierten Arbeit* in der Form

$$\eta_{inst} = \frac{L_0 - L_1}{L_0}$$

definiert. L_0 und L_1 sind die in dem instationären Strömungsfeld enthaltenen sekundlichen Energiebeträge vor und hinter dem Tragflügel. Sie sind dem Quadrat der Amplituden der normal zum Tragflügel gerichteten Geschwindigkeitskomponenten proportional. Werden die ungestörte Normalgeschwindigkeitsamplitude mit $|w|$ und die durch die Tragflügel beeinflußte Amplitude mit $|w_1|$ bezeichnet, so kann der instationäre Gütegrad in der Form

$$\eta_{inst} = 1 - \left(\frac{|w_1|}{|w_0|}\right)^2 \tag{27}$$

angegeben werden.

Sinngemäß wie im stationären Fall kann auch bei instationärer Strömung eine Gleitzahl

$$\varepsilon_{inst} = \frac{P_{xm}}{|P_z|} = |w| \frac{c_{Pxm}}{|c_{Pz}|} \tag{28}$$

definiert werden.

Die instationäre Gleitzahl ist dann von Bedeutung, wenn man den Tragflügel zur Vortriebserzeugung benutzen will. Sie gibt an, wie groß die mit einem geforderten Vortrieb zwangsläufig auftretenden Normalkraftamplituden sind.

c) Bezeichnungen.

l	Profillänge,
d	Profildicke,
b	Spannweite (Flügelbreite),
z_0	Schlagamplitude des Schlagflügels,
t	Zeit,
ν	Kreisfrequenz,
f	Schlagfrequenz des Schlagflügels,
v_0	mittlere Anströmgeschwindigkeit, konstant,
$w(t)$	Zusatzgeschwindigkeit senkrecht zur Richtung der mittleren Anströmgeschwindigkeit,
$\|w\|$	zugehörige Amplitude,
$\overline{w} = \frac{\|w\|}{v_0}$	desgl. dimensionslos,
q	Staudruck,
x, y, z	Rechtwinkliges Koordinatensystem, die x-Achse zeigt in die Richtung der mittleren Anströmgeschwindigkeit, die z-Achse senkrecht nach oben. Die Bezugslänge für die dimensionslosen Koordinaten ist die halbe Profillänge,
x_1	Integrationsveränderliche am Ort des Profiles,
ξ	Aufpunkt im Strömungsfeld auf der x-Achse,
$\mu = \frac{\nu l}{2 v_0}$	reduzierte Frequenz,
$T(\mu)$	Komplexe Funktion**,
$J_0(\mu)$, $J_1(\mu)$	Besselfunktionen,
$C_i(\mu)$, $S_i(\mu)$	Integralcosinus bzw. -sinus,
$\sigma(\mu)$	Abklingungsfaktor für die Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Tragflügeloberfläche,
c_P, c_M	Kraft- bzw. Momentenbeiwert,
$\|Z\|$	Amplitude einer komplexen Größe $Z = Z' + i\,Z''$.

(Eingegangen am 28. September 1960.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Helmut Schwanecke*, Berlin NW 21, Schleuseninsel im Tiergarten.

* Vgl. Fußnote 1 von Seite 366.

** Vgl. Fußnoten 3, 4 von Seite 364 und Fußnote 1 von Seite 366.

Spannungsoptik

Ein Lehr- und Nachschlagebuch für Forschung, Technik und Unterricht

Von Dr.-Ing. Helmut Wolf,

Leiter des spannungsoptischen Laboratoriums der Siemens-Schuckertwerke AG, Mülheim/Ruhr

Mit 311 zum Teil farbigen Abbildungen im Text und auf einer Tafel, 3 Tabellen und 1119 Literaturhinweisen von 1814 bis 1959. XX, 582 Seiten Gr.-8°. 1961. Ganzleinen DM 66,—

ZUR INFORMATION

Im vorliegenden Buch werden, außer den elastizitätstheoretischen und optischen Grundlagen der Spannungsoptik, die wichtigsten spannungsoptischen Verfahren zur Untersuchung ebener und räumlicher Spannungszustände ausführlich behandelt. Verschiedene Kapitel sind den besonders für die Praxis wichtigen Fragen des Modellmaterials, der Modellherstellung und der Versuchstechnik gewidmet. Auch spezielle Anwendungen des spannungsoptischen Verfahrens, wie z. B. die Untersuchung von Rotationsproblemen und elastoplastischen Spannungszuständen, werden beschrieben. In einem größeren Literaturverzeichnis sind alle wichtigen spannungsoptischen Veröffentlichungen des In- und Auslandes, beginnend mit den ersten Anfängen der Spannungsoptik, zusammengestellt. Das Buch wendet sich, außer an Studierende des Maschinenbaus, des Bauingenieurwesens, der Physik und Mathematik, an alle diejenigen Ingenieure, Konstrukteure, Physiker und Mathematiker, die sich in Lehre, Forschung oder Praxis mit Spannungs- bzw. Festigkeitsproblemen beschäftigen.

INHALTSÜBERSICHT

Die elastizitätstheoretischen und optischen Grundlagen · Die spannungsoptische Grundausrüstung · Das spannungsoptische Grundgesetz in zwei Dimensionen · Isochromaten · Isoklinen und Hauptspannungslinien · Die wichtigsten Verfahren zur Bestimmung ebener Spannungszustände · Übertragung der Modellversuche · Modellmaterial · Zur Modellherstellung · Versuchstechnik und photographische Ausrüstung · Die wichtigsten Verfahren zur Bestimmung räumlicher Spannungszustände · Zur Technik dreidimensionaler spannungsoptischer Untersuchungen · Spezielle Anwendungen spannungsoptischer Methoden · Literaturhinweise für die einzelnen Abschnitte · Literatur-, Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Einflußfelder orthogonal anisotroper Platten

Influence surfaces of orthogonal anisotropic plates

Von Dr.-Ing. **Siegfried Krug** und Dr.-Ing. **Peter Stein,**

Technische Universität Berlin

In deutscher und englischer Sprache

Englische Übersetzung durch Dipl.-Ing. HEINZ JUHL, Harrisburg, USA

Mit 31 Abbildungen im Text und 193 Tafeln. VIII, 32 Seiten. Quer 4°. 1961. Ganzleinen DM 67,50

ZUR INFORMATION

Dieses Buch wendet sich an den praktisch tätigen Ingenieur und erleichtert ihm die Berechnung orthogonal anisotroper Rechteckplatten des Leicht-, Stahl- und Stahlbetonbaues.

Die Momenteneinflußfelder sind nach den Randbedingungen des freien, des frei drehbaren und des eingespannten Randes sowie deren Kombinationen geordnet. Die verschiedensten Seitenverhältnisse, die unterschiedlichen Biegesteifigkeiten in der Längs- und Querrichtung sowie die Torsionssteifigkeit werden durch zwei Parameter ε und χ erfaßt. Es wird gezeigt, daß durch die ausgewählten Werte $\varepsilon = 2{,}0; 1{,}25; 1{,}0; 0{,}8; 0{,}5$ und $\chi = 0{,}8; 0{,}4; 0$ praktisch alle Seiten- und Steifigkeitsverhältnisse erfaßt werden können, da für zwischenliegende Werte einfache Interpolationsformeln angegeben sind.

Auf die Berücksichtigung einer beliebigen Querkontraktionszahl sowie auf die Verwendung der Einflußfelder zur Berechnung durchlaufender symmetrischer Platten ist hingewiesen.

Für gleichmäßig verteilte Vollbelastung sind die Biegemomente tabellarisch angegeben.

Die Anwendung der Tafeln, insbesondere die Auswertung sowie die Interpolation, werden durch Beispiele in einfacher Weise dargelegt.

FOR INFORMATION

This book appeals to the practising engineer. It simplifies the analysis of rectangular plates, orthogonally anisotropic, of the light construction and of steel and reinforced concrete structures.

The moment influence surfaces are arranged according to edge conditions, as free, hinged and fixed edges and to their combinations. The different bending stiffnesses in longitudinal and transverse direction, and the torsional stiffness are being considered by two parameters, ε and χ. It is shown that practically all side length and stiffness ratios can be considered with the chosen values of $\varepsilon = 2{,}0; 1{,}25; 1{,}0; 0{,}8; 0{,}5$ and $\chi = 0{,}8; 0{,}4; 0$, because simple formulas of interpolation are given for values lying between.

The general consideration of any Poisson's ratio, and the application of the influence surfaces for the analysis of continuous, symmetrical plates is mentioned.

The evaluation for the bending moments for uniformly distributed load has been done.

The application of the charts, particularly the evaluation and the interpolation, are explained in an easily understandable way by examples.

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung. Transformationen zur Berechnung einer beliebigen orthotropen Platte. Formeln zur Berechnung der Momente. Auswertung der Einflußfelder. Interpolation und Extrapolation beliebiger Platten. Allgemeine Betrachtungen über die Anwendung der Einflußfelder. Literaturverzeichnis. Tafelverzeichnis. Momente aus gleichmäßig verteilter Vollbelastung. Einflußfelder Nr. 1 bis Nr. 193.

CONTENTS

Introduction. Transformations for the analysis of the general orthotropic plate. Formulae for the computation of the moments. Evaluation of the influence surfaces. Interpolation and extrapolation of any general plate. General considerations on the application of the influence surfaces. Index of references. Chart index. Moments for uniformly distributed load over the entire plate. Influence surfaces No. 1 to No. 193.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag · Berlin / Göttingen Heidelberg · Printed in Germany · V/12/6